

ANÁLISE DA CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADE ANULAR
HORIZONTAL CONTENDO MEIO POROSO

Beatriz Machado dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa
de Pós-graduação em Engenharia Nuclear,
COPPE, da Universidade Federal do Rio de
Janeiro, como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Doutor em Engenharia
Nuclear.

Orientador: Su Jian

Rio de Janeiro
Março de 2025

ANÁLISE DA CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADE ANULAR
HORIZONTAL CONTENDO MEIO POROSO

Beatriz Machado dos Santos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Orientador: Su Jian

Aprovada por: Prof. Su Jian

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Prof. Renato Machado Cotta

Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio

Prof. Francis Henrique Ramos França

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2025

Santos, Beatriz Machado dos

Análise da convecção natural em cavidade anular horizontal contendo meio poroso/Beatriz Machado dos Santos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2025.

XVIII, 126 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Su Jian

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2025.

Referências Bibliográficas: p. 116 – 126.

1. transferência de calor. 2. convecção natural. 3. cilindro anular horizontal. 4. técnica da transformação integral generalizada. I. Jian, Su. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

À minha mãe e ao meu pai

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força e sabedoria que me concedeu para enfrentar e superar as adversidades.

À minha amada família, pelo apoio e suporte incondicionais; à minha irmã, Laís; à minha avó, Cléa; ao meu segundo pai, Ronaldo; e, especialmente, à minha mãe, Sônia Regina de Araújo Machado, uma grande guerreira e minha base sólida. Seu incentivo constante me fez seguir em frente e superar os desafios da vida. Sem ela, eu não teria chegado tão longe.

Ao meu pai, Oton Ferreira dos Santos Filho, que, embora não esteja mais presente fisicamente, foi um exemplo de pai e um talentoso professor de matemática. Sua paixão pela matemática também corre em minhas veias.

Ao meu amado marido, Wellington, por seu apoio inabalável, por compreender minhas longas horas de estudo e por seu coração generoso, que ilumina minha jornada e torna cada conquista ainda mais especial.

Ao meu orientador, professor Su Jian, por acreditar na minha capacidade, por me guiar nesta longa jornada e por ser um modelo de profissional extremamente dedicado, além de uma grande fonte de inspiração.

Ao meu tio Zeca, por ter me iniciado no mundo da física e por ter direcionado minha carreira ao caminho que me trouxe até aqui. Sua influência foi fundamental para minha trajetória acadêmica e profissional.

Ao professor Watanabe, por estender a mão quando o caminho parecia inatingível

e transformar uma oportunidade em um ponto de virada na minha jornada. Seu gesto foi o impulso que me mostrou novas possibilidades e me motivou a alcançar horizontes ainda mais distantes.

Aos amigos que tornaram os dias mais divertidos e alegres, mesmo à distância.

Aos professores e funcionários do PEN, que estão sempre dispostos a ajudar os alunos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DA CONVEÇÃO NATURAL EM CAVIDADE ANULAR
HORIZONTAL CONTENDO MEIO POROSO

Beatriz Machado dos Santos

Março/2025

Orientador: Su Jian

Programa: Engenharia Nuclear

Este trabalho apresenta estudos sobre convecção natural em uma cavidade anular horizontal bidimensional preenchida com meio poroso homegêneo, isotrópico e saturado por um fluido incompressível considerando problemas físicos distintos, através da técnica da transformada integral generalizada. O primeiro caso, estacionário, apresenta geração volumétrica uniforme de calor, paredes interna e externa da cavidade mantidas a temperaturas constantes e iguais, e paredes laterais adiabáticas. O ângulo do setor anular afeta fortemente a temperatura máxima e a partição da transferência de calor nas superfícies interna e externa e o efeito do aumento do número de Rayleigh é mais significante na função corrente que na temperatura. O segundo estudo, estacionário, apresenta aquecimento diferenciado, com temperaturas constantes nas paredes interna e externa, e paredes laterais adiabáticas. O terceiro estudo, transiente, aborda o problema da convecção natural com geração volumétrica de calor, paredes interna e externa sob mesma temperatura e paredes laterais adiabáticas. Neste caso a transformada é aplicada tanto na direção radial quanto na direção azimutal e a resultante temporal é resolvida pelo método de diferenças finitas. Para os casos estacionários, a transformada é aplicada na direção azimutal e o método de diferenças finitas é aplicado na direção radial.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION IN HORIZONTAL ANNULAR
CAVITY CONTAINING POROUS MEDIA

Beatriz Machado dos Santos

March/2025

Advisor: Su Jian

Department: Nuclear Engineering

This work presents studies on natural convection in a two-dimensional horizontal annular cavity filled with a homogeneous, isotropic porous medium saturated with an incompressible fluid, considering distinct physical problems using the generalized integral transform technique. The first steady-state case features uniform volumetric heat generation, with the inner and outer cavity walls maintained at constant and equal temperatures, and adiabatic side walls. The angle of the annular sector strongly affects the maximum temperature and the heat transfer partition between the inner and outer surfaces, and the effect of an increase in the Rayleigh number is more significant on the velocity field than on the temperature. The second steady-state study involves differentiated heating, with constant temperatures on the inner and outer walls, and adiabatic side walls. The third study, transient, addresses the problem of natural convection with volumetric heat generation, with the inner and outer walls at the same temperature and adiabatic side walls. In this case, the transform is applied in both the radial and azimuthal directions, and the resulting temporal equation is solved using the finite difference method. For steady-state cases, the transform is applied in the azimuthal direction, and the finite difference method is applied in the radial direction.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	4
1.2 Objetivo	5
1.3 Organização do texto	6
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 Convecção natural em cavidades	10
2.1.1 Convecção natural em geometrias cilíndricas horizontais	12
2.2 Técnica da Transformada Integral Generalizada	24
3 Metodologia	32
3.1 Aproximação de Boussinesq	32
3.2 Equações governantes generalizadas para regime transiente e regime estacionário	34
3.2.1 Formulação em função corrente	35
3.2.2 Formulação adimensional	36
3.2.3 Formulações específicas	37

3.3	Convecção natural em regime estacionário com geração volumétrica de calor	38
3.3.1	Problemas auxiliares	40
3.3.2	Transformada Integral Generalizada	41
3.3.3	Solução por diferenças finitas das equações transformadas	43
3.4	Convecção natural em regime estacionário com aquecimento diferenciado	45
3.4.1	Problemas auxiliares	47
3.4.2	Transformada Integral Generalizada	48
3.4.3	Solução por diferenças finitas das equações transformadas	50
3.5	Convecção natural em regime transiente com geração de calor volumétrica	52
3.5.1	Formulação em coordenada log-polar	54
3.5.2	Problemas auxiliares	57
3.5.3	Transformada Integral Generalizada	59
4	Resultados e discussões	61
4.1	Convecção natural em regime estacionário com geração volumétrica de calor	61
4.1.1	Análise de convergência	62
4.1.2	Resultados	63
4.1.3	Conclusões	76
4.2	Convecção natural em regime estacionário com aquecimento diferenciado	78
4.2.1	Análise de convergência	78
4.2.2	Resultados	81
4.2.3	Conclusões	91

4.3 Convecção natural em regime transiente com aquecimento volumétrico	92
4.3.1 Análise de convergência	92
4.3.2 Resultados	96
4.3.3 Conclusões	110
5 Considerações finais e trabalhos futuros	111
5.1 Considerações finais	112
5.2 Trabalhos futuros	115
Referências Bibliográficas	116

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de casco para armazenamento a seco de combustível nuclear usado. Fonte: http://www.eletronuclear.gov.br/Imprensa-e-Midias/Paginas/Eletronuclear-recebe-módulos-de-armazenamento-da-UAS.aspx .	3
3.1	Setor anular e sistema de coordenadas.	38
3.2	Setor anular e sistema de coordenadas	45
3.3	Setor anular e sistema de coordenadas	52
4.1	Comparação da solução por GITT com FDM para $\theta = \pi/2$, $\eta = 0, 25$, $\theta_f = \pi$, $Ra = 50$ e 500 .	64
4.2	Comparação da solução via GITT com resultados da literatura: perfil de temperatura ao longo de diferentes posições angulares para $Ra = 4000$.	66
4.3	Distribuição radial de temperatura em $\theta = \pi/2$ para números de Rayleigh variando de 10 a 5000, $\eta = 0, 5$ e $\theta_f = \pi$.	67
4.4	Distribuição radial de função corrente em $\theta = \pi/2$ para números de Rayleigh variando de 10 a 5000, $\eta = 0, 5$ e $\theta_f = \pi$.	68
4.5	Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0, 5$, $\theta_f = \pi$).	70

4.6 Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0,5$, $\theta_f = \frac{\pi}{2}$)	71
4.7 Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0,5$, $\theta_f = \frac{\pi}{4}$)	72
4.8 Temperatura máxima em função do número de Rayleigh Ra para ângulos do setor anular $\theta_f = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, e para raios adimensionais internos (a) $\eta = 0,4$, (b) $\eta = 0,5$, (c) $\eta = 0,6$, and (d) $\eta = 0,7$. . .	74
4.9 Fluxo de calor normalizado na superfície interna e externa como função do número de Rayleigh Ra para raios adimensionais internos $\eta = 0,4, 0,5, 0,6, 0,7$, e ângulos do setor anular $\theta_f = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e π	75
4.10 Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, $\eta = 2$, $\theta_f = \frac{\pi}{4}$ e $Ra = 50$	82
4.11 Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{2}$, $\eta = 2$, $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ e $Ra = 50$. .	83
4.12 Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0$, $\eta = 2$, $\theta_f = \pi$ e $Ra = 50$. .	84
4.13 Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0$, $\eta = 2,5$, $\theta_f = \pi$ e $Ra = 100$. .	86
4.14 Fenômeno das soluções duplas para $\eta = 2$, $\theta_1 = 0$ e $\theta_f = \pi$	88
4.15 Fenômeno das soluções duplas para $\eta = 2.5$, $\theta_1 = 0$ e $\theta_f = \pi$	89
4.16 Comparação do Nusselt médio em função de Rayleigh com resultados da literatura ($\eta=2$).	90
4.17 Distribuição radial de temperatura em diferentes instantes para $Ra=100$, $R = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$	100
4.18 Distribuição radial de função corrente em diferentes instantes para $Ra=100$, $R = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$	101
4.19 Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($R = 2$, $t = 1$, $\chi = 1$)	103

4.20 Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($Ra = 100$, $t = 1$, $\chi = 1$)	105
4.21 Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($Ra = 100$, $t = 1$, $R = 2$)	106
4.22 Comparaçāo da solução por GITT com FDM para $\theta = \pi/2$, $R = 2$, $\theta_f = \pi$, $Ra = 100$	108
4.23 Comparaçāo dos números de Nusselt médios interno e externo para $R = 2$, $\theta_i = 0$ e $\theta_f = \pi$ e diferentes números de Rayleigh.	109

Lista de Tabelas

4.1	Convergência da temperatura para $Ra = 100$, $\eta=0,5$ e $\theta_f = \pi$	62
4.2	Convergência da função corrente com $Ra = 100$, $\eta=0,5$ e $\theta_f = \pi$	63
4.3	Comparação da função corrente para diferentes números de Rayleigh.	66
4.4	Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com diferentes tamanhos e números de Rayleigh, para raio interno adimensional $\eta = 0,5$	69
4.5	Análise de convergência da temperatura para diferentes posições no eixo radial e $\theta = \frac{\pi}{2}$	79
4.6	Análise de convergência da função corrente para diferentes posições no eixo radial e $\theta = \frac{\pi}{2}$	80
4.7	Convergência da temperatura.	93
4.8	Convergência da função corrente.	94
4.9	Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com diferentes tamanhos e números de Rayleigh.	97
4.10	Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com $R = 2$, $\chi = 1$, para diferentes instantes e números de Rayleigh.	98

4.11 Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com $R = 2$, $Ra = 100$, para diferentes instantes e valores de χ	99
---	----

Nomenclatura

c_p Calor específico

Da Número de Darcy

g Aceleração da gravidade

Gr Número de Grashof

K Permeabilidade do meio poroso

k Condutividade térmica do meio poroso saturado

N Número de termos em expansões truncadas

Pr Número de Prandtl

q'' Taxa de geração de calor volumétrico

r, r^* Coordenada radial adimensional e dimensional

r_i Raio interno

r_o Raio externo

Ra Número de Rayleigh interno, $\frac{Kg\beta r^{*3}q''}{\alpha\nu k}$

T, T^* Temperatura adimensional e dimensional

T_w Temperatura dimensional no raio interno e externo

- u, v velocidades radial e azimutal adimensionais
- $\bar{\cdot}$ Transformada integral para uma coordenada
- $\tilde{\cdot}$ Transformada integral para duas coordenadas
- α Difusividade térmica do fluido
- β Coeficiente de expansão térmica
- χ Coeficiente do termo transiente da equação de movimento, igual à $\frac{\phi Pr}{Da}$
- ν Viscosidade cinemática do fluido
- ϕ Porosidade
- ψ, ψ^* Função corrente adimensional e dimensional
- θ Coordenada adimensional azimutal

Capítulo 1

Introdução

Os eventos que levaram ao acidente de Fukushima Daiichi, em 2011, alertaram a comunidade do setor nuclear quanto a necessidade de desenvolvimento de alternativas passivas para remoção do calor de decaimento dos elementos combustíveis nucleares (WANG *et al.* [1]).

Em geral, o combustível nuclear usado que é descarregado do núcleo do reator é colocado numa piscina de combustível usado (ou, em inglês, *spent fuel pool*) por um longo período de tempo. Este armazenamento submerso permite o decaimento dos produtos de fissão e a dissipação do calor (TEIXEIRA E SILVA *et al.* [2]). Na maioria dos casos, o local de armazenamento inicial está localizado próximo ao núcleo do reator, como acontece nas usinas nucleares brasileiras, Angra 1 e Angra 2.

Apesar das instalações de armazenamento de piscina de combustível usado possuirem um alto grau de aceitação dado o longo histórico de utilização deste meio de armazenamento em diversos países, em caso de ausência total de energia elétrica, o suprimento constante de água do sistema de resfriamento ativo da piscina é interrompido, aumentando a probabilidade de reação entre o revestimento dos elementos combustíveis e a água devido a temperaturas elevadas (ROMANATO [3], ALIATKA

et al. [4], HUNG *et al.* [5]). Tal evento pode potencialmente expor o material radioativo com consequências severas à instalação e ao meio ambiente.

Para mitigar a ocorrência desse tipo de evento, pode-se utilizar a convecção natural como forma de remoção de calor passiva no armazenamento de combustíveis usados. A convecção natural refere-se a um método de dissipação de calor que ocorre naturalmente sem a necessidade de sistemas mecânicos ativos, como ventiladores ou bombas de ar. Ou seja, o calor é dissipado de forma eficiente e natural, aproveitando o movimento natural dos fluidos, sem a necessidade de componentes ativos. Essa abordagem é comum em projetos que buscam eficiência energética e sustentabilidade, aproveitando os princípios físicos para manter temperaturas controladas de maneira mais econômica.

Para o setor nuclear, por exemplo, após alguns anos, o combustível que não será mais utilizado no reator pode ser removido da piscina de combustível usado e armazenado em um sistema de armazenamento a seco, como o casco mostrado na figura 1.1. Estes são excelentes exemplos de sistemas de resfriamento passivo, por convecção natural, e vem sendo adotados em diversas centrais nucleares, inclusive nas usinas brasileiras, como solução para o armazenamento de combustíveis usados.



Figura 1.1: Exemplo de casco para armazenamento a seco de combustível nuclear usado. Fonte: <http://www.eletronuclear.gov.br/Imprensa-e-Midias/Paginas/Eletronuclear-recebe-módulos-de-armazenamento-da-UAS.aspx>.

Percebe-se, portanto, que estudos aprofundados envolvendo o fenômeno da convecção natural tornaram-se imperativos para a indústria nuclear. Esses estudos abrangem desde a pesquisa fundamental, que visa compreender os mecanismos de convecção natural em cavidades, até a aplicação prática, envolvendo o projeto e a implementação de diversos tipos de sistemas de resfriamento passivo.

De forma geral, um problema envolvendo o fenômeno da convecção natural é modelado matematicamente pela equação da continuidade, pelas equações de Navier-Stokes (quantidade de movimento) e pela equação da energia. Contudo, obter a solução deste problema não é algo trivial devido à sua natureza não-linear.

Antigamente eram empregados métodos puramente numéricos para resolução deste problema, tais como o método de diferenças finitas e o método de volumes finitos, porém, com o desenvolvimento tecnológico, novos métodos com maior precisão e menor tempo de processamento vem sendo adotados. Entre eles, destaca-se

a Técnica da Transformada Integral Generalizada, um método híbrido que consiste de uma combinação de técnicas analíticas e aproximações numéricas, aprimorado a partir do método da Transformada Integral Clássica (MIKHAILOV e OZISIK [6]).

1.1 Motivação

A transferência de calor por convecção natural em cavidades com ou sem a presença de meio poroso é um tema de grande interesse para pesquisadores dada a sua aplicabilidade na indústria e em outros setores da engenharia. É possível encontrar facilmente na literatura estudos relacionados ao fenômeno desde a década de 60. Contudo, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura estudam cavidades verticais, devido ao fato da complexidade das cavidades horizontais ser superior.

A escolha da cavidade com geometria anular horizontal preenchida com meio poroso proposta nesse trabalho é justificada devido a sua pontencial aplicabilidade industrial, incluindo sistemas geotérmicos, produção de petróleo, controle da poluição das águas subterrâneas, isolamentos térmicos, processos de solidificação e especialmente pelo armazenamento de materiais nucleares.

A estocagem de combustível nuclear usado é um assunto de muito interesse para o setor nuclear de forma geral, e especialmente no Brasil, dada a recente adoção de um sistema de estocagem a seco para manutenção da operação da Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto (CNAAA). A compreensão do processo de transferência de calor é essencial para prever o comportamento a longo prazo dos materiais nucleares e minimizar os riscos ambientais associados.

Contudo, é importante ressaltar que o presente trabalho trata este problema como uma classe de problemas, e não um modelo fiel de um casco de armazenamento, uma vez que este tipo de estudo não está limitado a uma única finalidade, podendo

ser aplicada em diversas outras situações já mencionadas anteriormente.

A solução para esse tipo de problema não é trivial dada a natureza não-linear dos termos convectivos. Conforme a complexidade do problema aumenta, métodos mais poderosos devem ser empregados na busca de soluções. Nesse contexto, foi escolhida a Técnica de Transformação Integral Generalizada, um método híbrido analítico-numérico capaz de resolver uma variedade de problemas de equações diferenciais parciais e que se mostrou bastante efetivo para solução de problemas convectivos-difusivos nas últimas décadas.

1.2 Objetivo

O objetivo deste estudo é propor a utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada para investigar o comportamento tanto estacionário quanto transiente do fenômeno de transferência de calor por convecção natural em cavidades cilíndricas horizontais anulares preenchidas com um meio poroso saturado. O estudo abrange cavidades de diferentes tamanhos de setores angulares e razões de raios, considerando uma variedade de problemas físicos distintos. Esses problemas incluem, por exemplo, a geração interna uniforme de calor e o aquecimento diferenciado. A técnica proposta visa proporcionar uma análise detalhada e abrangente das condições de convecção natural nestas cavidades, oferecendo uma compreensão aprofundada de como diferentes configurações e parâmetros afetam o comportamento térmico do sistema.

Para alcançar esse objetivo, foram realizadas diversas análises detalhadas dos parâmetros envolvidos, incluindo variações no número de Rayleigh, que desempenha um papel crucial na intensidade da convecção natural. Também foram examinadas mudanças no tamanho do setor angular da cavidade, a razão de raios, entre outros

parâmetros relevantes. Essas análises foram conduzidas com o intuito de obter uma compreensão abrangente e profunda das características do fenômeno estudado. Além disso, foi verificada a possível existência de soluções duplas para condições iniciais específicas do problema, o que pode revelar complexidades adicionais na dinâmica do sistema investigado.

1.3 Organização do texto

No primeiro capítulo, foi apresentada uma breve introdução sobre convecção natural e sistemas de remoção de calor passivo. A discussão incluiu como a adoção desse tipo de sistema pode beneficiar as usinas nucleares brasileiras, destacando suas vantagens do ponto de vista da segurança. Além disso, foram abordados os benefícios em termos de liberação de espaço nas piscinas de combustível usado já existentes, facilitando os próximos ciclos de operação. Por fim, o capítulo também apresentou a motivação e os objetivos do presente trabalho, estabelecendo o contexto e a relevância da pesquisa.

No segundo capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica extensa e detalhada que abrange trabalhos anteriores sobre o fenômeno da convecção natural em cavidades. Esta revisão examina uma variedade de problemas físicos distintos relacionados ao tema, considerando as diferentes abordagens e condições investigadas em estudos anteriores. Além disso, o capítulo inclui uma análise aprofundada da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Este método híbrido combina técnicas numéricas e analíticas, e é destacado por sua eficácia na resolução de equações complexas que descrevem o fenômeno da convecção natural em cavidades. A seção dedicada à Técnica da Transformada Integral Generalizada busca explicar seus princípios fundamentais, sua aplicação prática e como ela contribui

para a obtenção das soluções necessárias para o fenômeno estudado neste trabalho.

No terceiro capítulo, é apresentado o desenvolvimento matemático detalhado para cada um dos três problemas físicos abordados nesta pesquisa. O primeiro problema consiste no estudo bidimensional em regime estacionário da convecção natural em uma cavidade anular horizontal que está preenchida com um meio poroso e sujeita a uma geração volumétrica de calor uniforme. O segundo problema também é um estudo bidimensional em regime estacionário, mas considera uma cavidade anular horizontal preenchida com um meio poroso que é aquecido de forma diferenciada, sem a presença de geração volumétrica de calor uniforme. Finalmente, o terceiro problema analisa o estudo bidimensional em regime transiente da convecção natural em uma cavidade anular horizontal, novamente preenchida com um meio poroso e sujeita à geração volumétrica de calor uniforme. Para todos os três problemas propostos, assume-se que as temperaturas nas paredes interna e externa da cavidade são constantes, as paredes laterais são adiabáticas e o meio poroso é descrito como isotrópico, homogêneo e saturado com um fluido incompressível.

No quarto capítulo, são apresentadas as análises detalhadas de convergência e os resultados obtidos para cada um dos estudos propostos nesta pesquisa. Este capítulo dedica-se a avaliar como as soluções numéricas convergem com base nas condições e parâmetros definidos para os problemas estudados. Em seguida, são discutidos os resultados obtidos para cada estudo, contemplando variações em diversos parâmetros relevantes, como o número de Rayleigh, que é um parâmetro importante na convecção natural e influencia o comportamento do fluxo térmico. Além disso, são consideradas as variações no tamanho da cavidade, tanto na direção radial quanto na direção azimutal, e os ângulos iniciais definidos nas simulações. Cada um desses fatores é examinado em detalhe para fornecer uma compreensão aprofundada dos impactos que eles têm sobre os resultados finais obtidos.

No quinto capítulo, são apresentadas as considerações finais, que incluem um resumo abrangente das principais análises realizadas ao longo do trabalho e dos resultados obtidos. Este capítulo oferece uma visão geral das conclusões mais importantes derivadas dos estudos e das simulações realizadas, destacando os principais achados e suas implicações. Além disso, são fornecidas recomendações para possíveis estudos futuros, baseadas nas observações e limitações identificadas durante a pesquisa. As recomendações visam orientar novos pesquisadores na exploração de áreas ainda não totalmente investigadas ou na melhoria das abordagens existentes, contribuindo assim para o avanço contínuo no campo de estudo.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma visão abrangente dos estudos realizados sobre convecção natural em cavidades, abordando tanto os trabalhos experimentais quanto os estudos numéricos desenvolvidos na área, com destaque para a Técnica da Transformada Integral Generalizada, que será tratada em uma seção especial.

A convecção natural, também conhecida como convecção livre, é um fenômeno de transporte de massa e calor que ocorre em fluidos. O movimento do fluido é gerado por diferenças de densidade resultantes de gradientes de temperatura. Quando uma região de um fluido é aquecida, suas moléculas ganham energia cinética, o que faz com que elas se afastem umas das outras, resultando em uma diminuição de sua densidade. Com isso, o fluido aquecido se torna mais leve e sobe, enquanto o fluido mais frio e denso ocupa seu lugar. Esse movimento ascendente e descendente cria correntes de convecção que transferem calor de forma eficiente.

O fenômeno da convecção natural tanto com geração interna de calor em cavidades, em que o meio atua como fonte de calor, quanto com aquecimento diferenciado, onde as paredes são mantidas em temperaturas distintas, vem ganhando destaque nas últimas décadas devido à sua vasta aplicabilidade na indústria e em setores da

engenharia como o de petróleo e o nuclear.

2.1 Convecção natural em cavidades

Problemas relacionados à transferência de calor por convecção natural em cavidades fechadas, tanto em escoamentos laminares quanto turbulentos, têm se tornado um tema de crescente interesse nas investigações científicas.

A convecção natural em cavidades é um fenômeno complexo e altamente influenciado por fatores como a forma geométrica da cavidade, as condições de contorno e as propriedades termofísicas do fluido em questão. Dependendo das condições de contorno e das características da cavidade podem se desenvolver padrões de escoamento laminar ou turbulento.

O número de Rayleigh (Ra), nomeado em homenagem ao matemático e físico inglês John William Strutt, o Lord Rayleigh, que foi o responsável por sua identificação após estudos experimentais, é um parâmetro adimensional utilizado para caracterizar a convecção natural em um fluido.

A magnitude do número de Rayleigh é uma boa indicação sobre se o fluxo é laminar ou turbulento. Quando o número de Rayleigh é mais baixo que o valor crítico para aquele fluido, a transferência de calor é primariamente na forma de condução; quando excede o valor crítico, a transferência de calor passa a ocorrer predominantemente na forma de convecção.

Diversos autores utilizam o número de Grashof (Gr), que está relacionado ao número de Prandtl (Pr) e ao número de Rayleigh. A Eq. (2.1) representa a forma como estes parâmetros se relacionam.

$$Gr = \frac{Ra}{Pr}. \quad (2.1)$$

Esses números são frequentemente empregados em várias pesquisas como parâmetros para analisar o comportamento dos regimes de escoamento, facilitando a identificação das regiões laminares, transientes e turbulentas em fluxos de convecção natural.

A modelagem teórica dos problemas de transferência de calor por convecção natural em cavidades é realizada a partir das equações de continuidade, de Navier-Stokes e de energia, formuladas de forma acoplada para o caso de convecção natural, resultando em um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, cujas soluções apresentam um comportamento desafiador para o tratamento numérico.

Existe uma ampla variedade de publicações que abordam a convecção natural para diversos tipos de geometrias, tais como, retangulares (DU e BILGEN [7]), quadradas (FUSEGI *et al.* [8], JOSHI *et al.* [9]), esféricas (POP *et al.* [10]), anulares (POP *et al.* [11], ARPINO *et al.* [12, 13], KHALEED *et al.* [14]), cilíndricas (SHEKAR *et al.* [15], HOLZBECHER e STEIFF [16]), horizontais (CHO *et al.* [17], MOUKALLED e ACHARYA [18], BELABID [19]), verticais (MARTIN [20], WOLFF F. [21], SHIM e HYUN [22]), inclinadas (LEE e GOLDSTEIN [23], RAHMAN e SHARIFF [24], SAHA [25]), preenchidas (HAAJIZADEH *et al.* [26], BLYTHE *et al.* [27], PRASAD e CHUI [28]) ou não com meio poroso.

Contudo, o objetivo principal deste trabalho é investigar cavidades com geometrias anulares horizontais preenchidas com meio poroso, abrangendo tanto o regime estacionário quanto o regime transiente, a fim de compreender de maneira abrangente os mecanismos de transferência de calor e fluxo de fluido em tais configurações.

2.1.1 Convecção natural em geometrias cilíndricas horizontais

A convecção natural em geometrias cilíndricas horizontais pode ser influenciada pela relação entre o diâmetro do cilindro e a altura do fluido, conhecida como relação de aspecto. Em cilindros que possuem uma relação de aspecto baixa, ou seja, aqueles que são mais achatados e apresentam uma altura menor em comparação ao diâmetro, o movimento do fluido dentro desses cilindros tende a ser predominantemente dominado por correntes circulares. Por outro lado, em cilindros que possuem uma relação de aspecto alta, ou seja, aqueles que são mais alongados e têm uma altura maior em relação ao diâmetro, o movimento do fluido no interior tende a ser mais influenciado por correntes verticais

A eficiência da transferência de calor nesse tipo de convecção natural depende de diversos fatores. A condutividade térmica do fluido, a temperatura das superfícies do cilindro e a presença de obstáculos internos podem afetar significativamente o processo. Assim, é fundamental compreender e controlar esses fatores a fim de otimizar a transferência de calor nesse tipo específico de configuração cilíndrica horizontal.

Diversos estudos focados em geometrias cilíndricas horizontais podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, o de MACK e BISHOP [29] que obtiveram a solução para a convecção natural estacionária bidimensional entre dois cilindros concêntricos horizontais, cada um mantido a uma temperatura uniforme diferente, através dos três primeiros termos na série de potências do número de Rayleigh. Os efeitos do aquecimento viscoso e compressional foram negligenciados, e todas as propriedades do fluido, exceto o peso específico, foram tratadas como constantes. Foi observado que para números de Prandtl correspondentes a gases e líquidos não metálicos, a configuração das linhas de corrente apresentada foi de um vórtice

único. O fluxo multicelular, no entanto, foi observado para números de Prandtl muito pequenos (metais líquidos). A análise das equações de perturbação revelou que a influência do número de Prandtl na transferência total de calor é um efeito de ordem superior, manifestando-se exclusivamente em termos de quarta potência e superiores do número de Rayleigh.

POWE *et al.* [30, 31] apresentaram resultados de uma investigação experimental e um estudo numérico em escoamentos convectivos naturais em anéis cilíndricos horizontais. POWE *et al.* [31] usou uma técnica numérica relativamente simples usando "diferenças centrais" convencionais para investigar a convecção natural na geometria do anel cilíndrico em toda a faixa de números de Rayleigh para os quais o escoamento é realmente estável e em uma ampla faixa de larguras de lacunas relativas inversas, $(\frac{2}{R-1})$. A curva de transição determinada experimentalmente de POWE *et al.* [30] de escoamento constante para instável foi confirmado numericamente para determinadas larguras de lacunas relativas inversas, onde o fluxo instável é precedido por um fluxo celular secundário.

Alguns trabalhos clássicos, como os de KUEHN e GOLDSTEIN [32, 33, 34], conduziram diversos estudos teóricos, numéricos e experimentais sobre convecção natural em geometrias anulares horizontais concêntricas e excêntricas com diferentes tipos de fluidos, tais como ar, água e nitrogênio. A transferência de calor foi analisada para diversos parâmetros, tais como número de Rayleigh, número de Prandtl, número de Nusselt, entre outros. Equações de correlação foram desenvolvidas, utilizando um modelo de camada limite de condução. Essas equações são válidas para diversas condições, incluindo transferência de calor por condução, fluxo laminar e fluxo turbulento.

CALTAGIRONE [35] comparou resultados experimentais e teóricos sobre a convecção natural em uma camada porosa saturada delimitada por dois cilindros

concêntricos, horizontais e isotérmicos. Observou-se que, para números de Rayleigh pequenos, o estado do sistema corresponde a um regime de pseudo-condução. As isotérmicas são coaxiais com os cilindros. E para números de Rayleigh maiores, um regime estacionário de convecção bidimensional se estabeleceu entre os dois cilindros.

BURNS e TIEN [36] relataram os resultados de uma investigação analítica bidimensional da convecção natural, em regime estacionário, em meio poroso completamente envolvido por esferas concêntricas e cilindros horizontais pelo método das diferenças finitas e pelo método das perturbações. Os resultados indicaram que um valor máximo da transferência de calor ocorre para as geometrias esférica e cilíndrica dependentes apenas da razão do raio para cada geometria.

FAROUK e GUÇERI [37] apresentaram soluções numéricas para um estudo estacionário da convecção natural bidimensional no anel formado entre dois cilindros horizontais concêntricos que estavam mantidos a temperaturas constantes e diferentes. Os resultados de fluxo e transferência de calor foram divididos em vários regimes. Para números de Rayleigh abaixo de 100, as velocidades foram muito pequenas para afetar a distribuição de temperatura, que permaneceu essencialmente como na condução pura. Observou-se a existência de uma região de transição para números de Rayleigh entre 100 e 30000. Para um valor de Ra igual à 10000 observou-se uma inversão radial da temperatura, sugerindo a separação das camadas limite térmicas do cilindro interno e externo.

VASSEUR *et al.* [38] através de uma abordagem numérica, usando o método de diferenças finitas, estudou o problema da convecção natural bidimensional laminar em uma camada anular porosa, com geração interna de calor uniformemente distribuída, entre dois cilindros horizontais concêntricos e isotérmicos. Foi observado que para números de Rayleigh baixos, um perfil de temperatura mais ou menos parabólico foi estabelecido ao longo do anel, resultando em dois vórtices contra-

rotativos em cada metade da cavidade. Sob o efeito de convecção fraca e moderada, a temperatura máxima dentro do meio poroso foi consideravelmente mais alta do que aquela induzida por condução pura. Para valores maiores do número de Rayleigh, as análises revelaram uma estrutura de fluxo que consiste em um núcleo estratificado termicamente e duas camadas limite com uma espessura e taxa de transferência de calor da ordem de $Ra^{-1/3}$ e $Ra^{1/3}$, respectivamente.

TSUI e TREMBLAY [39] estudaram numericamente o problema transiente de transferência de calor por convecção natural entre dois cilindros horizontais isotérmicos, considerando a aproximação de Boussinesq, por meio da abordagem de vorticidade-função de corrente para baixos números de Rayleigh. Eles investigaram o efeito da razão dos diâmetros nas características do fluxo.

SENT e TORRANCE [40] apresentaram um estudo que introduziu uma aproximação de anel fino para tornar o problema dependente do tempo analiticamente tratável. As equações governantes para a convecção natural dependente do tempo, originadas de uma distribuição arbitrária de fonte de calor em um anel fino, foram reduzidas à solução de duas equações diferenciais ordinárias não lineares. A aproximação não impôs nenhuma restrição sobre o número de Rayleigh, embora os efeitos de possíveis zonas de recirculação dentro da espessura do anel tenham sido suprimidos. Para números de Rayleigh infinitos e aquecimento simétrico, existe uma solução exata. Para aquecimento assimétrico ou números de Rayleigh finitos, oscilações de velocidade amortecidas foram observadas, levando a um movimento em regime estacionário. Sob certas condições, dois estados estacionários estáveis são possíveis, e qualquer um deles pode ser alcançado dependendo das condições iniciais. Também foi demonstrado que o comportamento caótico não é possível sob a aproximação de anel fino, a menos que os efeitos de inércia do fluido sejam incluídos.

HIMASEKHAR e BAU [41] realizaram um estudo sistemático de soluções

múltiplas e bidimensionais das equações de Darcy-Oberbeck-Boussinesq para um meio poroso saturado confinado entre dois cilindros horizontais. Para números de Rayleigh abaixo de um valor crítico, foi obtida uma solução única e para números de Rayleigh maiores, múltiplas soluções foram obtidas. Para razões de raios relativamente grandes $R > 2^{1/4}$, as soluções adicionais aparecem como ramos isolados. Duas soluções permanecem estáveis para uma faixa de números de Rayleigh maiores que o Rayleigh crítico, até que eventualmente elas perdem estabilidade por meio das bifurcações de Hopf, onde a estabilidade do sistema muda após um ponto crítico e uma solução periódica surge. Para razões de raios relativamente pequenos $R < 2$, as soluções adicionais aparecem por meio de um processo de bifurcação simples. Um ramo da solução perde estabilidade enquanto outro ganha. Para Rayleigh superior a um valor crítico, foi encontrada apenas uma solução estável e que perde estabilidade via uma bifurcação de Hopf conforme o número de Rayleigh aumenta.

STORESLETTEN e TVEITEREID [42] estudaram a convecção natural em um cilindro circular horizontal poroso com parede aquecida de maneira não uniforme, a fim de estabelecer uma temperatura linear na direção vertical, com seções finais perfeitamente isoladas. Concluiu-se que para cilindros longos com comprimento adimensional $L > 0,86$, um fluxo tridimensional único foi observado no início da convecção, enquanto para cilindros curtos ($L < 0,86$), a convecção foi bidimensional. Neste caso, o estado de condução bifurca-se em duas soluções convectivas qualitativamente diferentes. Uma das soluções fornece um padrão de fluxo simétrico consistindo em dois vórtices de rotações contrárias, enquanto o fluxo da segunda solução consiste em três vórtices.

STEWART e BURNS [43] investigaram numericamente as características do fluxo de convecção natural em regime estacionário e as distribuições de temperatura para um anel horizontal bidimensional contendo um meio poroso com geração de

calor de forma uniforme. As equações governamentais dependentes do tempo foram não dimensionadas e transformadas em uma forma explícita de diferenças finitas. As equações de diferenças finitas foram obtidas a partir de expansões truncadas das séries de Taylor, utilizando um esquema de diferenças centrais. Uma condição de fluxo multicelular foi encontrada a partir de condições de parede isotérmica com temperatura igual. As células contrárias e de baixa intensidade se desenvolveram à medida que a taxa de geração de calor aumentou. A simetria invertida nos padrões de fluxo e nas distribuições de temperatura ocorreu quando a condição de parede isotérmica aquecida mudou de uma parede do cilindro para a outra.

GARG e SZERI [44] desenvolveram um estudo numérico do fluxo de convecção natural em um anel cilíndrico horizontal com o objetivo de estabelecer a utilidade da formulação Galerkin-Spline para problemas de convecção natural. O anel possuía paredes isotérmicas e o fluido apresentava propriedades materiais constantes, exceto pela sua densidade; a variação de densidade foi incorporada por meio da aproximação de Boussinesq. Duas formulações foram empregadas: a formulação de velocidade e a formulação de função corrente. Consegiu-se demonstrar a utilidade da formulação Galerkin-Spline para o problema e, em comparação com dados publicados, mostrou-se que ela levava a uma maior precisão do que o método das diferenças finitas. Também se demonstrou que a formulação de função corrente era computacionalmente superior à formulação de velocidade. Não se encontrou bifurcação do estado básico até 60.000 no número de Grashof, mesmo sem a suposição a priori de simetria sobre o plano vertical. Esse último resultado contrastou nitidamente com os resultados obtidos quando material poroso preenchia o anel.

Estudos conduzidos por BARBOSA MOTA e SAATDJIAN [45, 46, 47] investigaram a convecção natural em uma camada porosa entre cilindros concêntricos e cilindros excêntricos horizontais através de um método numérico para resolver as

equações de Darcy-Boussinesq bidimensionais em uma malha muito fina. Os estudos mostraram que quando R está acima de 1,75, a transição de um regime de fluxo de duas células para quatro células depende se o número de Rayleigh é aumentado ou diminuído e um circuito fechado de histerese é formado associado à transição de um padrão de fluxo para o outro. Para razões de raio pequenas ($R < 1,75$), regimes de fluxo em estado estacionário contendo duas, quatro, seis e oito células são obtidos progressivamente na camada porosa conforme o número de Rayleigh é aumentado, mas nenhum comportamento de histerese foi observado. Os estudos também mostraram que a redução da razão do raio aumenta a estabilidade do fluxo, mudando os efeitos convectivos para números de Rayleigh mais altos.

GUJ e STELLA [48] estudaram numericamente a dinâmica de fluido e os campos térmicos em um anel bidimensional entre cilindros excêntricos horizontais, sob condições laminares e estacionárias. Observaram que a excentricidade horizontal do cilindro interno gerou, em contato com resultados numéricos conhecidos, uma taxa de fluxo azimutal não nula no canal entre os dois cilindros e alterou substancialmente o campo térmico e a geometria da pluma. Três mecanismos básicos para a formação de padrões em anéis excêntricos foram encontrados, dependendo do número de Rayleigh: condução, que é dominante para Ra baixos; convecção; e o fluxo azimutal global, que se tornam mais relevantes para Ra intermediários e altos. Esses dois últimos mecanismos são opostos, de forma que uma inclinação horária ou anti-horária da pluma e das linhas de corrente na região superior pode ser induzida em Ra intermediários e altos, dependendo de qual desses dois mecanismos prevalece.

YOO [49] investigou numericamente os fenômenos de bifurcação e a existência de soluções duplas na convecção natural em um anel horizontal para fluidos com $0,3 \leq Pr \leq 1$. O fluido estava contido entre dois cilindros circulares concêntricos horizontais infinitos, são mantidos a diferentes temperaturas uniformes. Foi ob-

servado que quando o número de Rayleigh excedeu um valor crítico, dois tipos de padrões de fluxo, denominados pelo autor como "fluxo descendente" e "fluxo ascendente", que são caracterizados pela direção do fluxo do fluido na parte superior do anel, se manifestaram. Também foi visto que à medida que o número de Prandtl aumentava, o número de Rayleigh crítico, acima do qual tanto o fluxo ascendente quanto o fluxo descendente existem, diminuía. A distribuição de temperatura do fluxo descendente difere significativamente daquela do fluxo ascendente, exceto na parte inferior do anel. Além disso, o número de Nusselt global do fluxo descendente é maior do que o do fluxo ascendente, e a diferença diminuiu à medida que o número de Prandtl aumentou.

SCURTU *et al.* [50] analisaram teoricamente a convecção livre estacionária bidimensional em um meio poroso saturado confinado entre dois cilindros concêntricos horizontais através do uso de uma expansão de perturbação regular. A aproximação de Darcy-Boussinseq foi adotada e assumiu-se que o fluxo era conduzido por um gradiente de temperatura vertical constante. As análises mostraram que para uma dada espessura relativa da região anular, o fluxo convectivo do fluido permitiu encontrar regimes de fluxo com quatro células dependendo do número de Dacry-Rayleigh crítico.

SHU *et al.* [51] realizaram um estudo numérico sobre a transferência de calor convectiva natural em um anel excêntrico horizontal entre um quadrado externo isotérmico e um cilindro interno circular isotérmico aquecido usando o método da quadratura diferencial (DQ).

MIZUSHIMA *et al.* [52] elaboraram um estudo teórico, assumindo campos de fluxo bidimensionais e incompressíveis, sobre transições de convecção natural em um anel entre cilindros concêntricos horizontais. Foi estabelecido que o cilindro interno é mantido a uma temperatura superior em relação à temperatura do cilindro externo,

e por meio de simulações numéricas foi confirmada a existência de soluções duplas estáveis para números de Rayleigh maiores do que um determinado valor crítico.

YOO [53] investigou a convecção natural em um anel horizontal onde uma parede apresenta fluxo de calor constante para os fluidos de $0,2 \leq \text{Pr} \leq 1$. O cilindro externo foi mantido a uma temperatura constante, e o cilindro interno foi aquecido com um fluxo de calor constante. Usando uma abordagem numérica para resolver as equações transientes que regem os campos de fluxo e temperatura, foi mostrado que existem soluções estáveis duplas acima de um número de Rayleigh crítico.

KUMARI e NATH [54] estudaram o fluxo de convecção natural não estacionário de um anel cilíndrico horizontal preenchido com um meio poroso. As equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação de energia que governa o fluxo de convecção natural não estacionário, foram resolvidas pelo método de volumes finitos. Verificaram que, quando a temperatura do cilindro externo foi repentinamente reduzida, ocorreu uma mudança na direção da transferência de calor em um pequeno intervalo de tempo imediatamente após a redução impulsiva da temperatura da parede. Nenhum fenômeno semelhante foi observado quando a temperatura da parede do cilindro externo foi repentinamente aumentada. O estado estacionário final foi alcançado após determinado instante de tempo. Os resultados mostraram que o anel completamente preenchido com um meio poroso apresentou a melhor eficácia de isolamento. A convecção no anel horizontal foi confinada principalmente nas regiões superior e inferior. Portanto, apenas essas regiões deveriam ser isoladas. No caso de um anel parcialmente preenchido com material poroso, isolar a região próxima ao cilindro externo foi mais eficaz do que isolar a região próxima ao cilindro interno. Também relataram que o efeito do número de Darcy na transferência de calor foi mais pronunciado do que o efeito do número de Grashof.

ALDOSS [55] investigou a convecção natural em um anel horizontal preenchido

com meio poroso de permeabilidade variável. Dois casos foram considerados: variação da permeabilidade do meio poroso na direção radial e na direção tangencial. A solução numérica foi obtida utilizando o método dos volumes finitos. Verificou-se que a variação da permeabilidade teve uma influência significativa nos perfis de velocidade e nos perfis de temperatura. Isso afeta as características de transferência de calor e pode ser utilizado em aplicações de melhoria da transferência de calor.

YUAN *et al.* [56] apresentaram uma investigação da convecção natural em anéis concêntricos horizontais de formato interno variável, onde as superfícies interna e externa foram mantidas a uma temperatura constante. Foi observado que a presença de cantos nos anéis quadrados e triangulares e o maior espaço superior no anel elíptico melhoraram o desempenho da transferência de calor em comparação com o anel cilíndrico.

ABAHRI *et al.* [57] estudaram a convecção bidimensional acoplada com o processo de termodifusão. O estudo abordou uma investigação teórica e numérica da separação de espécies em uma mistura líquida binária saturando um espaço anular poroso horizontal, onde o cilindro interno foi aquecido isotermicamente. A resolução analítica foi realizada utilizando o método de perturbação como função do tempo versus os parâmetros físicos correspondentes (nímeros de Rayleigh e Lewis, etc.). Os resultados revelaram que a separação pode ser aumentada com um valor ótimo para pequenos valores do número de Rayleigh. Além disso, esses valores são menos importantes do que o valor crítico de Rayleigh, que leva à perda da estabilidade do fluxo unicelular encontrada na literatura.

ROY e GORLA [58] investigaram a convecção natural em um reator delimitado por dois cilindros concêntricos e preenchido com meio poroso não-Darcy saturado com um fluido gerador de calor por meio de uma reação exotérmica. As equações transformadas foram resolvidas usando o método das diferenças finitas. Um es-

tudo detalhado do fluxo e campos térmicos e a transferência de calor nas paredes interna e externa do anel foi conduzido para uma ampla gama de parâmetros físicos, tais como, o número de Darcy, parâmetro de arrasto de Forchheimer, número de Frank-Kamenetskii, número de Rayleigh e raio externo do anel. Dois vórtices contra-rotativos foram observados em cada metade do anel. Foi verificado a partir das variações das linhas de corrente e isotérmicas que para valores mais altos dos parâmetros físicos os vórtices externos moveram-se para cima e a temperatura máxima foi observada no topo do anel. No entanto, para parâmetros físicos com valores mais baixos, os vórtices internos e externos ocorreram na mesma linha e as isotermas tornaram-se quase concêntricas. Com o aumento do número de Darcy e do número de Rayleigh, o valor máximo da magnitude do número de Nusselt nas paredes interna e externa aumentou, enquanto seu valor mínimo diminuiu.

SANTOS *et al.* [59] realizaram um estudo bidimensional preliminar sobre convecção natural conjugada em uma cavidade cilíndrica horizontal contendo um corpo quadrado gerador de calor envolto em ar, cujo valor do número de Prandtl é 0,7. O regime de escoamento laminar foi adotado e os resultados numéricos, considerando uma variação do número de Rayleigh de 10^3 a 10^7 , foram obtidos por meio de simulações em um *software* comercial após testes de convergência de malha. Foi observado que o número de Nusselt aumenta de acordo com o número de Rayleigh.

JA e CHEDDADI [60] estudaram numericamente o efeito combinado de diferentes tipos de condições iniciais e a variação do número de Rayleigh nas características da convecção termossolutal em um anel horizontal preenchido com um meio poroso saturado por um fluido binário. A equação de Darcy, as equações de conservação de energia e concentração de espécies são resolvidas pelo Método da Direção Implícita Alternada (ADI), baseado na discretização por Diferença Finita Central. Os resultados numéricos em regime estacionário, utilizando três tipos de condições iniciais,

mostram que diferentes padrões de fluxo multicelular são obtidos com o aumento do número de Rayleigh.

TOUZANI *et al.* [61] investigaram numericamente a convecção natural em um anel cilíndrico horizontal com dois blocos de aquecimento, de forma trapezoidal invertida, colocados em uma posição mediana, de forma global e por zona, distinguindo três zonas: superior, central e inferior. Um fluxo bi-vórtice foi observado e a influência de cada vórtice na transferência de calor foi analisada. O fluxo de calor e a taxa de transferência calculados por zona (superior, central e inferior) mostraram que a transferência de calor era mais importante para a zona superior do anel. Comparado à configuração sem blocos, a presença de blocos contribuiu para a melhoria geral da transferência de calor. Essa melhoria foi observada na zona inferior (efeito vórtice inferior) e na central. Para a zona superior, apesar de sua importância, a transferência de calor foi deteriorada.

Alguns poucos estudos consideraram a condição de contorno de isofluxo na parede interna. KUMAR [62] e KUMAR e KEYHANI [63] estudaram a transferência de calor por convecção natural em anéis horizontais com cilindros internos com fluxo de calor constante e cilindros externos mantidos a temperaturas constantes.

Existem alguns estudos sobre os efeitos da convecção natural com partições ou setores preenchidos por meio poroso, como deflectores radiais (LAI [64]), partições azimutais em um anel horizontal (NISHIMURA *et al.* [65]), setores anulares esféricos (BAYTAS *et al.* [66]), e anel concêntrico composto (LEMOS e MASCIARELLI [67]). No entanto, até onde sabemos, o efeito do ângulo azimutal do setor na convecção natural em um setor anular horizontal contendo meio poroso gerador de calor não foi investigado sistematicamente na literatura.

2.2 Técnica da Transformada Integral Generalizada

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (em inglês, *Generalized Integral Transform Technique* - GITT) é uma metodologia híbrida numérico-analítica derivada da Técnica de Transformação Integral Clássica (em inglês, *Classical Integral Transform Technique* - CITT), cuja evolução a partir do Método de Separação de Variáveis e sua metodologia foram sintetizados em ÖZISIK [68].

Embora a CITT seja capaz de lidar com problemas não homogêneos, dificuldades são encontradas na busca pelas soluções de problemas não transformáveis, ou seja, problemas onde não é possível encontrar uma base de expansão de função própria que leve a um sistema transformado dissociado após a transformação integral. Um problema diferencial parcial pode se tornar não transformável devido a várias circunstâncias, como no caso de problemas de difusão-convecção, presença de termos não lineares nas condições de contorno, nos coeficientes da equação ou no termo fonte, conforme evidenciado por COTTA *et al.* [69].

A GITT surge como uma alternativa para a CITT na resolução de uma grande variedade desses problemas não-transformáveis, incluindo as formulações não lineares mais usuais em aplicações em mecânica dos fluidos e transferência de calor, além de apresentar um desempenho computacional eficiente e oferecer controle de precisão. Inicialmente desenvolvida por COTTA [70] e COTTA e OZISIK [71] e sistematicamente desenvolvida posteriormente por SERFATY e COTTA [72], COTTA [73], COTTA e MIKHAILOV [74], COTTA [75].

Essa técnica híbrida, que usa expansões de autofunção truncadas (COTTA e MIKHAILOV [76]), é particularmente interessante para fins de referência e validação (*benchmark*). O método retém as mesmas características de uma solução puramente

analítica, dado o aspecto de controle automático do erro (COTTA [77]), tendo sua aplicação, tanto na transformação das equações quanto na implementação do código computacional, e obteve um enorme impulso com o surgimento de pacotes para computação simbólica-numérica como o Mathematica (WOLFRAM [78]), que, inclusive, possibilita imediata visualização dos resultados devido aos seus recursos gráficos.

O método da Transformada Integral Generalizada é aplicado iniciando-se pela identificação do problema de autovalor associado mais adequado ao fenômeno em estudo. Nesse processo, uma equação diferencial parcial com condições de contorno apropriadas é formulada e as soluções correspondentes, ou seja, as autofunções e os autovalores, são encontradas.

Em seguida, as transformadas integrais adequadas para cada campo de interesse no problema são selecionadas. Pares de transformadas e inversas são encontrados, permitindo a conversão das equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias. A escolha das transformadas depende das propriedades do problema e das características desejadas da solução.

Após a escolha das transformadas, ocorre a transformação integral do problema diferencial parcial, utilizando-se as fórmulas inversas nos termos não transformáveis. Em casos nos quais o sistema diferencial ordinário resultante é infinito, realiza-se um truncamento apropriado para reduzir o sistema a um número finito de equações.

A solução numérica é então calculada para obter os potenciais transformados, que representam os resultados intermediários obtidos após a transformação integral. Por fim, as fórmulas analíticas de inversão são aplicadas para obter os campos originais desejados. Nessa etapa, ocorre a inversão das transformadas aplicadas anteriormente, convertendo as soluções do domínio transformado para o domínio original (ALVES, L. S. B. [79]).

Portanto, a Técnica da Transformada Integral Generalizada propõe relaxar a

exigência de uma transformação integral exata que resulte em um sistema diferencial transformado não acoplado. Em vez disso, um problema auxiliar (de autovalor), que pode ser ou não característico do problema original, é selecionado para desenvolver o par transformada-inversa. A transformação integral é então aplicada, produzindo um sistema diferencial ordinário infinito e acoplado. Após truncar o sistema em uma ordem suficientemente alta para garantir a precisão necessária, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente utilizando algoritmos estabelecidos. A fórmula explícita de inversão, portanto, fornece uma representação analítica para as variáveis independentes restantes que foram eliminadas pela transformação integral.

A GITT tem se mostrado uma ferramenta computacional poderosa para a solução de problemas com contornos móveis, como estudados por GUERRERO e COTTA [80] e GUIGON *et al.* [81], problemas com propriedades físicas variáveis, como em MACHADO e COTTA [82], problemas com condições de contorno não lineares como apresentado por COTTA *et al.* [83], problemas com termos fonte, conforme AN *et al.* [84], problemas com cavidades completamente preenchidas com meio poroso (ALVES e COTTA [85], ALVES *et al.* [86], MACHADO DOS SANTOS *et al.* [87]) ou parcialmente preenchidas com meio poroso (HIRATA *et al.* [88, 89], LISBOA *et al.* [90], LISBOA e COTTA [91]) e problemas que não consideram meio poroso, como em LEAL *et al.* [92, 93].

Resumidamente, COTTA [94] evidenciou as diversas vantagens importantes que este método oferece. Sua abordagem híbrida numérico-analítica concentra o esforço computacional na integração numérica de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs), uma tarefa bem consolidada mesmo para sistemas rígidos. A ampla disponibilidade de solucionadores de EDOs e sub-rotinas científicas simplifica a implementação computacional do método. Além disso, o controle automático de erro global permite trabalhar com precisão definida pelo usuário, otimizando

o esforço computacional. O método também lida eficientemente com domínios de formas irregulares, seja por meio da descrição das superfícies de contorno ou pela decomposição em regiões regulares.

Este método pode ser extendido a situações multidimensionais (LISBOA *et al.* [95]), com um aumento moderado do esforço computacional. Dada a natureza híbrida desta técnica, a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em uma única variável independente restante, uma vez que a parte analítica do procedimento de solução é empregada sobre todas menos uma variável independente.

PÉREZ-GUERRERO [96] utilizou a GITT para resolver as equações de Navier-Stokes em formulação de função corrente somente, para um escoamento incompressível, em regime estacionário e laminar, bidimensional em uma cavidade de seção quadrada de comprimento infinito na qual a tampa superior movia-se a uma velocidade constante unitária. Através de uma formulação biharmônica foi possível obter um problema auxiliar simples, que permitiu transformar o problema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário não-linear acoplado capaz de ser resolvido com reduzido esforço de implementação computacional.

SERFATY e COTTA [97] apresentou uma abordagem numérico-analítica híbrida, baseada em desenvolvimentos na técnica de transformada integral generalizada, para a solução de uma classe de problemas não-lineares de convecção-difusão transiente. A equação diferencial parcial original foi transformada integralmente em um sistema enumerável de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas, que foi resolvido numericamente para os potenciais transformados. A convergência da análise híbrida foi ilustrada ao considerar a equação não-linear unidimensional de Burgers, que tipicamente representa a competição entre convecção e difusão com um modelo matemático simples. O comportamento de convergência da análise híbrida

foi então investigado, para tamanhos crescentes do sistema de EDO truncado, e comparado criticamente com uma solução semi-discreta para diferentes valores dos parâmetros governantes.

BAOHUA e COTTA [98] aplicaram a GITT para estudar a convecção natural em estado estacionário em um invólucro retangular vertical poroso saturado submetido à geração interna uniforme de calor. As soluções foram obtidas na formulação da função corrente e temperatura e os resultados foram comparados com soluções puramente numéricas relatadas previamente na literatura. Observou-se que perto das paredes frias, o movimento convectivo tornou-se mais importante e as isoterma ficaram mais espaçadas. O ponto máximo da função corrente (ψ) está mais próximo do topo e o padrão de fluxo é assimétrico na direção vertical. As linhas isotérmicas são mais planas na parte superior do recinto e mais paralelas na parte inferior, onde predomina a condução.

MACHADO e COTTA [99] trataram as equações da camada limite bidimensional estacionária, para fluxo simultâneo de calor e fluido dentro de dutos, através da técnica generalizada de transformada integral. O fluxo estava sujeito a uma temperatura uniforme nas paredes e condições uniformes na entrada, tanto para os campos de velocidade quanto de temperatura.

PÉREZ GUERRERO e COTTA [100] estudaram o fluxo laminar estacionário incompressível bidimensional de um fluido newtoniano, desenvolvido dentro de um canal de placas paralelas, com uma distribuição uniforme de velocidade longitudinal na entrada, tanto para fluxo paralelo quanto para fluxo irrotacional. Como esperado, em abordagens do tipo expansão em funções próprias, a convergência melhora à medida que se afasta da entrada do duto.

PEREIRA *et al.* [101] estudou o desenvolvimento hidrodinâmico de um fluido newtoniano que flui através de um canal anular concêntrico sob regime laminar

estacionário considerando escoamento incompressível e axissimétrico. Os resultados numéricos obtidos demonstraram excelentes características de convergência desse método híbrido. Comparações críticas com a formulação da camada limite foram fornecidas e um conjunto de resultados de *benchmark* foi produzido, para diferentes valores do número de Reynolds, a saber, $Re = 0, 40, 300, 1000$ e 2000 , para cobrir uma ampla gama de parâmetros governantes e permitir comparações com resultados relatados anteriormente, obtidos através da formulação da camada limite

SOUZA *et al.* [102] aplicou GITT à versão transitória do problema clássico da cavidade quadrada preenchida com ar e aquecida diferencialmente, considerando as propriedades do fluido como funções da temperatura. A validade do procedimento computacional foi confirmada pela comparação dos resultados com dados previamente relatados para propriedades constantes do fluido. A solução para propriedades variáveis do fluido, utilizando a aproximação de Boussinesq, foi apresentada para vários valores de inclinações, com um número de Rayleigh de 10^3 e um número de Prandtl de $0,71$, demonstrando a capacidade da GITT em capturar a formação e evolução de células circulantes a um baixo número de Rayleigh. Também foram propostas novas correlações para o ângulo de inclinação e a razão de aspecto.

LISBOA *et al.* [90] analisaram a convecção natural dentro de uma cavidade retangular parcialmente preenchida com um meio poroso gerador de calor através da Técnica de Transformação Integral Generalizada (GITT), e utilizaram controle automático de erros para resolver as equações de fluxo laminar e energia. Foi considerado um meio heterogêneo com propriedades físicas espacialmente variáveis e termos de origem que explicam a transição abrupta das duas regiões. A análise mostrou que aumentos no número de Rayleigh com a constante geração interna de calor diminuem a temperatura máxima dentro da cavidade, permitindo o desenvolvimento de vórtices mais fortes. Além disso, diminuir a proporção também tem

efeitos positivos no resfriamento da cavidade.

FU *et al.* [103] propuseram a técnica de transformação integral generalizada para investigar o comportamento natural da convecção estacionário em um cilindro vertical, com geração interna de calor uniforme, sob diferentes condições de contorno, tais como, paredes adiabáticas e isotérmicas. A análise de convergência mostrou que a presente técnica analítica-numérica híbrida tem um bom desempenho de convergência em ordens de truncamento relativamente baixas no campos de temperatura e função corrente. Observou-se que o número de Rayleigh tem efeitos significativos nos componentes de velocidade, tanto nas condições de contorno isotérmica quanto adiabática. Com o aumento do número de Rayleigh, as velocidades radial e axial aumentaram linearmente. Além disso, os componentes de velocidade aumentaram mais rapidamente na condição de contorno adiabático. Também foi constatado que os efeitos do número de Rayleigh na distribuição de temperatura foram insignificantes.

PEREIRA *et al.* [104] investigaram a convecção natural em cavidades anulares horizontais através da GITT considerando um fluxo em estado estacionário, regime laminar, bidimensional. Casos de teste para diferentes razões de aspecto e número de Rayleigh foram validados com dados experimentais de Kuehn e Goldstein. Encontrou-se uma máxima desvio relativo de 5% comparando os resultados da GITT para o número de Nusselt médio com os dados experimentais, enquanto um desvio relativo máximo de 8% foi encontrado ao comparar com uma correlação empírica dos mesmos autores. Os autores concluíram que a solução GITT com o problema de autovalor na coordenada angular apresentou melhores taxas de convergência do que a expansão de autofunções mais usual na variável radial. Isso ocorreu devido às condições de contorno originalmente homogêneas na direção angular, que não requeriam filtragem para aprimoramento da convergência, ao contrário da filtragem

necessária na direção radial que introduziu um termo fonte na equação filtrada para a função de corrente.

Neste trabalho, a GITT é aplicada para resolver as equações governantes em função da temperatura e função corrente, combinando o método da transformada integral generalizada com o método das diferenças finitas. Excelente convergência é mostrada tanto para a função corrente quanto para a temperatura em todos os casos abordados. São observados efeitos significativos do ângulo do setor no padrão do fluxo de convecção natural, bem como nos valores máximos de temperatura e função corrente.

Capítulo 3

Metodologia

As equações governantes que regem a convecção natural são as relativas à conservação de massa, momentum e energia. Tais equações sofrem adaptações correspondentes à natureza do fluido em questão, seja ele compressível ou incompressível, levando em consideração a caracterização do escoamento, bidimensional ou tridimensional, e considerações específicas relacionadas à análise do empuxo.

Este capítulo apresenta as formulações matemáticas para todos os problemas físicos abordados nesta tese e seus respectivos métodos de solução. Inicialmente uma formulação geral é apresentada, seguida pelas formulações específicas para cada problema físico, que são: convecção natural em regime estacionário com geração volumétrica de calor, convecção natural em regime estacionário com aquecimento diferenciado e convecção natural em regime transiente com geração volumétrica de calor.

3.1 Aproximação de Boussinesq

A aproximação de Boussinesq é uma simplificação comumente utilizada na dinâmica dos fluidos, especialmente em problemas de convecção natural, onde as

variações de densidade de um fluido são pequenas e ocorrem principalmente devido a mudanças de temperatura.

A densidade do fluido (ρ) é tratada como constante em todas as equações do movimento, exceto no termo de flutuabilidade, que envolve a força de gravidade. Isso significa que as variações de densidade devido à temperatura são desprezadas em quase todos os termos, exceto onde elas causam um efeito significativo, como na força de empuxo que dirige a convecção. Dessa forma, a densidade é linearizada em torno de um valor de referência ρ_0 , de acordo com a Eq. (3.1):

$$\rho(T) \approx \rho_0(1 - \beta(T - T_0)), \quad (3.1)$$

onde T é a temperatura local, T_0 é a temperatura de referência e β é o coeficiente de expansão térmica volumétrica do fluido.

A principal vantagem é que ao tratar a densidade como constante na maioria dos termos, a aproximação simplifica a análise matemática e computacional dos problemas de convecção. Essa aproximação é válida para muitos problemas práticos em que as variações de densidade são pequenas, ou seja, quando a variação da massa específica é regida apenas por pequenas variações de temperatura, como na convecção natural de ar ou água em ambientes onde as diferenças de temperatura são moderadas.

Contudo, a aproximação não é válida quando as variações de temperatura são grandes o suficiente para causar variações significativas na densidade, o que pode afetar a precisão dos resultados. Também não é apropriada para fluidos compressíveis, onde as mudanças de densidade não podem ser desprezadas, nem para fluxos de alta velocidade, onde os efeitos de compressibilidade são relevantes.

3.2 Equações governantes generalizadas para regime transitório e regime estacionário

Sob a aproximação de Boussinesq para convecção natural, que ignora diferenças de densidade, exceto onde elas aparecem em termos multiplicados pela aceleração devido à gravidade e a lei de Darcy para meios porosos, que é válida apenas quando os efeitos de forças iniciais e difusão de vorticidade perto de limites sólidos podem ser negligenciadas, as equações governantes para convecção natural em um meio poroso isotrópico com propriedades constantes, podem ser descritas pelas seguintes equações:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{K}{\mu} \frac{b}{\Phi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho_0(1 - \beta(T - T_0))\vec{g}), \quad (3.2b)$$

$$\rho c_p \left(b \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + q''', \quad (3.2c)$$

onde $b = 0$ para o problema estacionário e $b = 1$ para o problema transitório, K é a permeabilidade, Φ é a porosidade, ν é a viscosidade cinemática, μ é a viscosidade dinâmica, β o coeficiente de expansão térmica, ρ_0 a densidade, T_0 a temperatura de referência, c_p calor específico, k condutividade térmica e q''' a taxa volumétrica de geração de calor.

Em uma cavidade anular horizontal, o sistema de coordenadas cilíndricas é adotado. Para um problema bidimensional, temos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3a)$$

$$\frac{K}{\mu} \frac{b}{\Phi} \frac{\partial u}{\partial t} + u = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) g \cos \theta \right), \quad (3.3b)$$

$$\frac{K}{\mu} \frac{b}{\Phi} \frac{\partial v}{\partial t} + v = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) g \sin \theta \right), \quad (3.3c)$$

$$\rho c_p \left(b \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + q''', \quad (3.3d)$$

onde u e v são as componentes radial e azimutal da velocidade, respectivamente.

3.2.1 Formulação em função corrente

A utilização da formulação de função corrente ψ neste trabalho é justificada pela sua capacidade de reduzir o número de equações a serem resolvidas. Ao satisfazer automaticamente a equação da continuidade, essa abordagem viabiliza a simplificação das equações de quantidade de movimento para uma única expressão, eliminando a pressão durante esse processo.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.4a,b)$$

Derivando a Eq. (3.3b) em θ e a Eq. (3.3c) em r e subtraindo uma da outra, temos a equação da quantidade de movimento em termos da função corrente, representada pela Eq. (3.5).

$$\begin{aligned} b \frac{K}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = \\ -\frac{K}{\mu} \rho_0 \beta g \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando a função corrente, podemos escrever a equação da conservação de energia

conforme a Eq. (3.6).

$$\rho c_p \left(b \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + q''' . \quad (3.6)$$

3.2.2 Formulação adimensional

As equações que governam o estudo da convecção natural são, em geral, muito complexas e a sua aplicação se torna mais conveniente com a adimensionalização das mesmas. Dessa maneira, é comum examinar o comportamento de escoamentos de fluidos em cavidades com convecção natural por meio da utilização de números adimensionais. Portanto, para facilitar a resolução dos problemas abordados, introduzimos os seguintes parâmetros e variáveis adimensionais.

$$r^* = \frac{r}{L}, \quad T^* = \frac{T - T_o}{\Delta T_o}, \quad u^* = \frac{uL}{\alpha}, \quad v^* = \frac{vL}{\alpha}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{\alpha}, \quad (3.7a-j)$$

$$t^* = \frac{t\alpha}{L^2}, \quad \chi = \Phi \frac{Pr}{Da}, \quad Pr = \frac{\mu}{\alpha}, \quad Da = \frac{K}{L^2}, \quad Ra = \frac{g \beta K \Delta T_o L}{\alpha \nu}.$$

O termo L é um raio de referência, o termo ΔT_o representa a temperatura de referência, o termo χ é o coeficiente do termo transiente que é representado pela razão da porosidade (Φ) com o número de Prandtl (Pr), pelo número de Darcy (Da). Os símbolos α , β , g , K , ν e k denotam, respectivamente, a difusividade térmica efetiva, o coeficiente de expansão térmica, a aceleração gravitacional, a permeabilidade, a viscosidade cinemática e a condutividade térmica efetiva.

Logo, a equação da conservação da quantidade de movimento na forma adimensional é escrita como:

$$\frac{b}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = -Ra \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right). \quad (3.8)$$

A equação da conservação da energia na forma adimensional é escrita como:

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{Ra_i}{Ra}, \quad (3.9)$$

$$\text{onde } Ra_i = \frac{g \beta K q''' L^3}{\alpha \mu k}.$$

3.2.3 Formulações específicas

A formulação (3.9) pode ser usada tanto em problemas com geração interna de calor e quanto problemas com aquecimento diferenciado por conta da definição do número de Rayleigh escolhida para cada situação. O número de Rayleigh é um número adimensional, assim denominado em homenagem ao físico inglês Lord Rayleigh e sua aplicação é geralmente realizada por meio dos valores de Rayleigh externo (baseado na diferença de temperatura das paredes laterais) e interno (baseado na taxa volumétrica de geração de calor).

Para problemas com geração e paredes em uma mesma temperatura, a diferença de temperatura de referência é definida como $\Delta T_o = \frac{q''' L^2}{k}$. Assim, os dois números de Rayleigh são idênticos $Ra = Ra_i$.

Para problemas sem geração de calor interna, mas com duas paredes em temperaturas distintas T_1 e T_2 , adotamos $T_o = T_1$ e $\Delta T_o = T_2 - T_1$. Assim, teremos as temperaturas adimensionais de 0 e 1 nas duas paredes respectivamente.

3.3 Convecção natural em regime estacionário com geração volumétrica de calor

Consideremos a convecção natural em uma cavidade anular horizontal bidimensional delimitada por superfícies no raio interno r_i , raio externo r_o e ângulos θ_1 e θ_2 , como apresentado na figura 3.1.

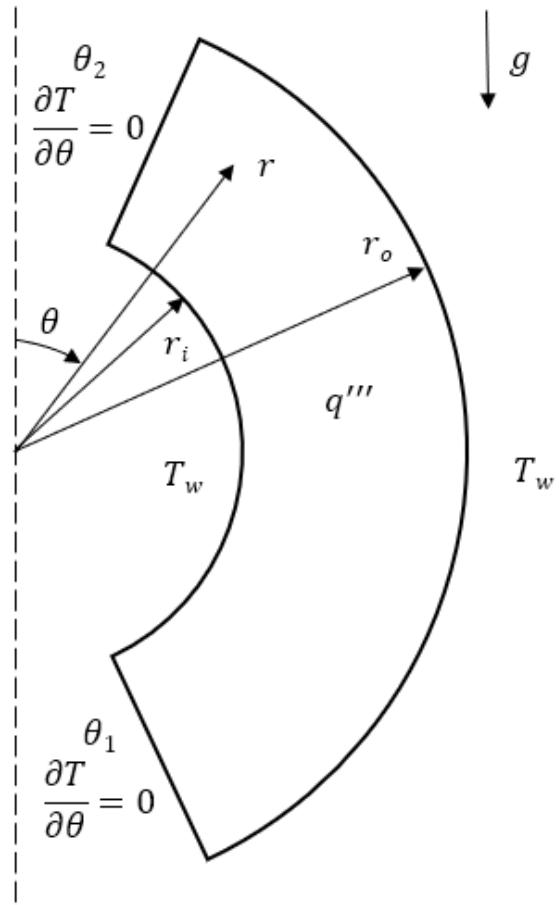


Figura 3.1: Setor anular e sistema de coordenadas.

A cavidade é preenchida com um meio poroso, sujeito a aquecimento interno uniforme, com taxa volumétrica de geração de calor q''' . O meio poroso é isotrópico, homogêneo e saturado com um fluido incompressível. As paredes internas e externas são mantidas à mesma temperatura constante e uniforme T_w , e as paredes laterais em θ_1 e θ_2 são mantidas adiabáticas. Todas as propriedades termofísicas são

consideradas constantes.

Para o problema estacionário com geração volumétrica de calor e paredes mantidas sob a mesma temperatura, podemos reescrever as equações (3.8) e (3.9) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -Ra \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right),$$

em $\eta < r < 1, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.10a)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + 1,$$

em $\eta < r < 1, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.10b)$

onde η é o raio adimensional interno da cavidade e o raio de referência adotado na adimensionalização das equações é o raio externo da cavidade.

As equações governantes estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\psi(\eta, \theta) = \psi(1, \theta) = 0, \quad T(\eta, \theta) = T(1, \theta) = 0, \quad (3.11a-d)$$

$$\psi(r, \theta_1) = \psi(r, \theta_2) = 0, \quad \frac{\partial T(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r, \theta_2)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.11e-h)$$

3.3.1 Problemas auxiliares

Para a aplicação da técnica da transformada integral generalizada os problemas auxiliares para a coordenada θ são escolhidos:

$$\frac{d^2\chi_i(\theta)}{d\theta^2} + \mu_i^2 \chi_i(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.12a)$$

$$\chi_i(\theta_1) = 0, \quad \chi_i(\theta_2) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12b,c)$$

para a função corrente ψ , e

$$\frac{d^2\Gamma_n(\theta)}{d\theta^2} + \lambda_n^2 \Gamma_n(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.13a)$$

$$\frac{d\Gamma_n(\theta_1)}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\Gamma_n(\theta_2)}{d\theta} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13b,c)$$

para a temperatura T , onde $\chi_i(\theta)$ e $\Gamma_n(\theta)$ são as autofunções, μ_i e λ_n são os autovalores correspondentes.

As autofunções $\chi_i(\theta)$ são dadas por

$$\chi_i(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \sin(\mu_i \theta), \quad \mu_i = \frac{\pi i}{\theta_f}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

onde $\theta_f = \theta_2 - \theta_1$.

As autofunções $\Gamma_n(\theta)$ são dadas por

$$\Gamma_1(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta_f}}, \quad \lambda_1 = 0, \quad (3.15a)$$

$$\Gamma_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \cos(\lambda_n \theta), \quad \lambda_n = \frac{\pi(n-1)}{\theta_f}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.15b)$$

3.3.2 Transformada Integral Generalizada

Os problemas auxiliares permitem a definição do seguinte par de transformada integral para a função corrente e a temperatura, respectivamente:

$$\bar{\psi}_i(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \psi(r, \theta) d\theta, \quad \text{transformada,} \quad (3.16a)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(\theta) \bar{\psi}_i(r), \quad \text{inversa,} \quad (3.16b)$$

$$\bar{T}_n(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) T(r, \theta) d\theta, \quad \text{transformada,} \quad (3.17a)$$

$$T(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\theta) \bar{T}_n(r), \quad \text{inversa.} \quad (3.17b)$$

Aplicando a transformação na direção ‘ θ ’, a Eq. (3.10a) é operada por $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) d\theta$, com a fórmulas inversas (3.16b) e (3.17b) aplicadas:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_i(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}_i(r)}{\partial r} - \frac{\mu_i^2}{r^2} \bar{\psi}_i(r) = -Ra \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{\partial \bar{T}_j(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^* \bar{T}_j(r) \right), \quad (3.18)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

onde os coeficientes a_{ij} e a_{ij}^* são dados por

$$a_{ij} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \sin(\theta) \Gamma_j(\theta) d\theta, \quad (3.19a)$$

$$a_{ij}^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \cos(\theta) \Gamma_j'(\theta) d\theta. \quad (3.19b)$$

Analogamente, a Eq. (3.10a) é operada por $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) d\theta$, com a fórmulas inver-

sas (3.16b) e (3.17b) aplicadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{T}_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_n(r)}{\partial r} - \frac{\lambda_n^2}{r^2} \bar{T}_n(r) + \bar{f}_n &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{njk}^* \bar{\psi}_k(r) \frac{\partial \bar{T}_j(r)}{\partial r} \\ &- \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{njk} \bar{T}_k(r) \frac{\partial \bar{\psi}_j(r)}{\partial r}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde os coeficientes \bar{f}_n , B_{njk} e B_{njk}^* são dados por

$$\bar{f}_n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) d\theta \equiv \sqrt{\theta_f}, \quad (3.21a)$$

$$B_{njk} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) \chi_j(\theta) \Gamma'_k(\theta) d\theta, \quad (3.21b)$$

$$B_{njk}^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) \Gamma_j(\theta) \chi'_k(\theta) d\theta. \quad (3.21c)$$

As equações transformadas (3.18) e (3.20) são resolvidas considerando as seguintes condições de contorno transformadas :

$$\bar{\psi}_i(\eta) = 0, \quad \bar{\psi}_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22a,b)$$

$$\bar{T}_n(\eta) = 0, \quad \bar{T}_n(1) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22c,d)$$

3.3.3 Solução por diferenças finitas das equações transformadas

O método das diferenças finitas é um método numérico bem estabelecido e foi escolhido por sua simplicidade para resolver problemas de transferência de calor com baixo custo computacional que não podem ser tratados por análise exata devido às não linearidades [105].

Para fins computacionais, as expansões de autovalores são truncadas em uma ordem finita N . As equações transformadas (3.18) e (3.20) juntamente com as condições de contorno transformadas (3.22) são resolvidas pelo método das diferenças finitas na direção r . O intervalo $[\eta, 1]$ é discretizado em uma malha uniforme com $M + 1$ nós, onde $r_m = \eta + m\Delta r$ e $\Delta r = (1 - \eta)/M$. Usando o esquema de diferença finita central de segunda ordem [68], Eqs. (3.18) e (3.20) são discretizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\psi}_{i,m+1} - 2\bar{\psi}_{i,m} + \bar{\psi}_{i,m-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_m} \frac{\bar{\psi}_{i,m+1} - \bar{\psi}_{i,m-1}}{2\Delta r} - \frac{1}{r_m^2} \mu_i^2 \bar{\psi}_{i,m} = \\ - Ra \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\bar{T}_{j,m+1} - \bar{T}_{j,m-1}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_m} \sum_{j=1}^N a_{ij}^* \bar{T}_{j,m} \right), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{e} \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}_{n,m+1} - 2\bar{T}_{n,m} + \bar{T}_{n,m-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_m} \frac{\bar{T}_{n,m+1} - \bar{T}_{n,m-1}}{2\Delta r} - \frac{1}{r_m^2} \lambda_n^2 \bar{T}_{n,m} = \\ \left(\frac{1}{r_m} \right) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(B_{njk}^* \bar{\psi}_{k,m} \frac{\bar{T}_{j,m+1} - \bar{T}_{j,m-1}}{2\Delta r} - B_{njk} \bar{T}_{j,k} \frac{\bar{\psi}_{k,m+1} - \bar{\psi}_{k,m-1}}{2\Delta r} \right) - \bar{f}_n, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{e} \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (3.23b)$$

onde $\bar{\psi}_{i,m}$ denota $\bar{\psi}_i(r_m)$ e $\bar{T}_{n,m}$ denota $\bar{T}_n(r_m)$.

As equações (3.23) junto com condições de contorno discretizadas são prontamente resolvidas para obter os ponteciais transformados $\bar{\psi}_{i,m}$ e $\bar{T}_{n,m}$. As fórmulas inversas (3.16b) e (3.17b) são então aplicadas para obter os resultados finais para a temperatura e função corrente originais. Todos os cálculos são implementados por meio do software Mathematica.

3.4 Convecção natural em regime estacionário com aquecimento diferenciado

Consideremos a convecção natural em uma cavidade anular horizontal delimitada por superfícies no raio interno r_i , raio externo r_o , e ângulos θ_1 e θ_2 , como apresentado na figura 3.2.

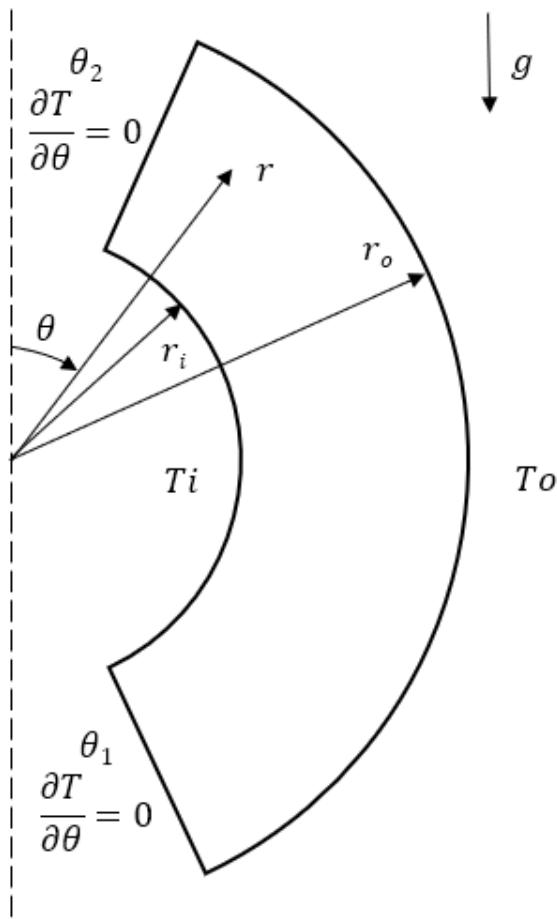


Figura 3.2: Setor anular e sistema de coordenadas

A cavidade é preenchida com um meio poroso, aquecido pela parede interna, com temperatura prescrita T_i . O meio poroso é isotrópico, homogêneo e saturado por um fluido incompressível. A parede externa é mantida em uma mesma temperatura constante e uniforme T_o , e as paredes laterais em θ_1 e θ_2 são adiabáticas, ou seja,

a transferência de calor é desprezível. Todas as propriedades termodinâmicas são consideradas constantes.

Para o problema estacionário com aquecimento diferenciado sem geração volumétrica de calor, podemos reescrever as equações (3.8) e (3.9) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -Ra \left(\frac{\partial T}{\partial r} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \text{ em } 1 < r < \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \text{ em } 1 < r < \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.24b)$$

onde η é o raio adimensional externo da cavidade e o raio de referência adotado na adimensionalização das equações é o raio interno da cavidade.

As equações governantes estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\psi(1, \theta) = \psi(\eta, \theta) = 0, \quad T(1, \theta) = 1, \quad T(\eta, \theta) = 0, \quad (3.25a-d)$$

$$\psi(r, \theta_1) = \psi(r, \theta_2) = 0, \quad \frac{\partial T(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r, \theta_2)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.25e-h)$$

3.4.1 Problemas auxiliares

Para a aplicação da técnica da transformada integral generalizada os problemas auxiliares para a coordenada θ são escolhidos:

$$\frac{d^2\chi_i(\theta)}{d\theta^2} + \mu_i^2 \chi_i(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.26a)$$

$$\chi_i(\theta_1) = 0, \quad \chi_i(\theta_2) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26b,c)$$

para a função corrente ψ , e

$$\frac{d^2\Gamma_n(\theta)}{d\theta^2} + \lambda_n^2 \Gamma_n(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.27a)$$

$$\frac{d\Gamma_n(\theta_1)}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\Gamma_n(\theta_2)}{d\theta} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27b,c)$$

para a temperatura T , onde $\chi_i(\theta)$ e $\Gamma_n(\theta)$ são as autofunções, μ_i e λ_n são os autovalores correspondentes.

As autofunções $\chi_i(\theta)$ são dadas por

$$\chi_i(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \sin(\mu_i \theta), \quad \mu_i = \frac{\pi i}{\theta_f}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

onde $\theta_f = \theta_2 - \theta_1$.

As autofunções $\Gamma_n(\theta)$ são dadas por

$$\Gamma_1(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta_f}}, \quad \lambda_1 = 0, \quad (3.29a)$$

$$\Gamma_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \cos(\lambda_n \theta), \quad \lambda_n = \frac{\pi(n-1)}{\theta_f}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.29b)$$

3.4.2 Transformada Integral Generalizada

Os problemas auxiliares permitem a definição do seguinte par de transformada integral para a função corrente e a temperatura, respectivamente:

$$\bar{\psi}_i(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \psi(r, \theta) d\theta, \quad \text{transformada,} \quad (3.30a)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(\theta) \bar{\psi}_i(r), \quad \text{inversa,} \quad (3.30b)$$

$$\bar{T}_n(r) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) T(r, \theta) d\theta, \quad \text{transformada,} \quad (3.31a)$$

$$T(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\theta) \bar{T}_n(r), \quad \text{inversa.} \quad (3.31b)$$

Aplicando a transformação na direção ‘ θ ’, a Eq. (3.24a) é operada por $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) d\theta$, com as fórmulas inversas (3.30b) e (3.31b) devidamente aplicadas:

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\psi}_i(r)}{dr} - \frac{\mu_i^2}{r^2} \bar{\psi}_i(r) = -Ra \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \frac{d \bar{T}_j(r)}{dr} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^* \bar{T}_j(r) \right), \quad (3.32)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

onde os coeficientes a_{ij} e a_{ij}^* são dados por

$$a_{ij} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \sin(\theta) \Gamma_j(\theta) d\theta, \quad (3.33a)$$

$$a_{ij}^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \chi_i(\theta) \cos(\theta) \Gamma_j'(\theta) d\theta. \quad (3.33b)$$

Analogamente, a Eq. (3.24b) é operada por $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) d\theta$, com as fórmulas in-

versas (3.30b) e (3.31b) devidamente aplicadas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{T}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}_n(r)}{dr} - \frac{\lambda_n^2}{r^2} \bar{T}_n(r) &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{njk}^* \bar{\psi}_k(r) \frac{d\bar{T}_j(r)}{dr} \\ &- \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{njk} \bar{T}_k(r) \frac{d\bar{\psi}_j(r)}{dr}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde os coeficientes \bar{f}_n , B_{njk} e B_{njk}^* são dados por

$$\bar{f}_n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) d\theta \equiv \sqrt{\theta_f}, \quad (3.35a)$$

$$B_{njk} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) \chi_j(\theta) \Gamma'_k(\theta) d\theta, \quad (3.35b)$$

$$B_{njk}^* = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n(\theta) \Gamma_j(\theta) \chi'_k(\theta) d\theta. \quad (3.35c)$$

As equações transformadas (3.32) e (3.34) são resolvidas considerando as seguintes condições de contorno transformadas:

$$\bar{\psi}_i(1) = 0, \quad \bar{\psi}_i(\eta) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36a,b)$$

$$\bar{T}_n(1) = \bar{f}_n, \quad \bar{T}_n(\eta) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36c,d)$$

3.4.3 Solução por diferenças finitas das equações transformadas

A solução pelo método de diferenças finitas é similar a solução do problema físico em regime estacionário com geração volumétrica de calor, apresentado previamente, considerando pequenas alterações nos intervalos da coordenada radial e a ausência do termo fonte.

As expansões de autovalores são truncadas em uma ordem finita N e as equações (3.32) e (3.34) juntamente com as condições de contorno transformadas (3.36) são resolvidas pelo método de diferenças finitas na direção r . O intervalo $[1, \eta]$ é discretizado em uma malha uniforme com $M+1$ nós, onde $r_m = 1 + m\Delta r$ e $\Delta r = (\eta - 1)/M$. Usando o esquema de diferença finita central de segunda ordem, as equações (3.32) e (3.34) discretizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\psi}_{i,m+1} - 2\bar{\psi}_{i,m} + \bar{\psi}_{i,m-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_m} \frac{\bar{\psi}_{i,m+1} - \bar{\psi}_{i,m-1}}{2\Delta r} - \frac{1}{r_m^2} \mu_i^2 \bar{\psi}_{i,m} = \\ - Ra \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\bar{T}_{j,m+1} - \bar{T}_{j,m-1}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_m} \sum_{j=1}^N a_{ij}^* \bar{T}_{j,m} \right), \\ i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{e} \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.37a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}_{n,m+1} - 2\bar{T}_{n,m} + \bar{T}_{n,m-1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_m} \frac{\bar{T}_{n,m+1} - \bar{T}_{n,m-1}}{2\Delta r} - \frac{1}{r_m^2} \lambda_n^2 \bar{T}_{n,m} = \\ \left(\frac{1}{r_m} \right) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(B_{njk}^* \bar{\psi}_{k,m} \frac{\bar{T}_{j,m+1} - \bar{T}_{j,m-1}}{2\Delta r} - B_{njk} \bar{T}_{j,k} \frac{\bar{\psi}_{k,m+1} - \bar{\psi}_{k,m-1}}{2\Delta r} \right), \\ n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{e} \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.37b) \end{aligned}$$

onde $\bar{\psi}_{i,m}$ denota $\bar{\psi}_i(r_m)$ e $\bar{T}_{n,m}$ denota $\bar{T}_n(r_m)$.

Eqs. (3.37) juntas com as condições de contorno discretizadas são rapidamente

resolvidas para obter os potencias transformados $\bar{\psi}_{i,m}$ e $\bar{T}_{n,m}$. As fórmulas inversas (3.30b) e (3.31b) são então aplicadas para obter os resultados finais a temperatura e função corrente originais por meio do software Mathematica.

3.5 Convecção natural em regime transiente com geração de calor volumétrica

Consideremos a convecção natural em regime transiente em uma cavidade anular horizontal bidimensional delimitada por superfícies no raio interno r_i , raio externo r_o e ângulos θ_1 e θ_2 , como apresentado na figura 3.3.

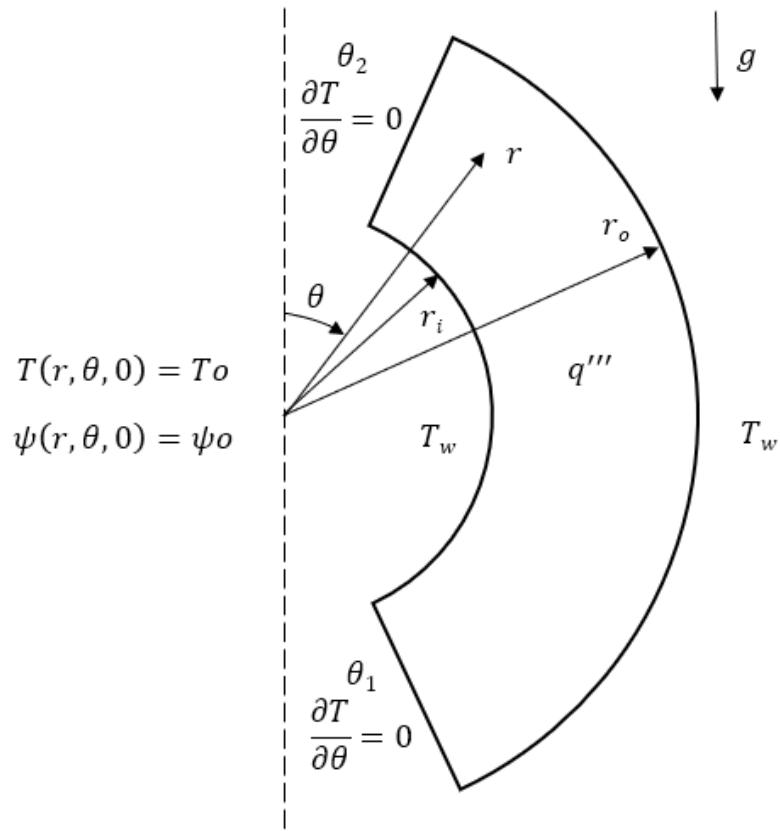


Figura 3.3: Setor anular e sistema de coordenadas

A cavidade é preenchida com um meio poroso, sujeito a aquecimento interno uniforme, com taxa volumétrica de geração de calor q''' . O meio poroso é isotrópico, homogêneo e saturando com um fluido incompressível. As paredes internas e externas são mantidas à mesma temperatura constante e uniforme T_w , e as paredes laterais em θ_1 e θ_2 são mantidas adiabáticas. Todas as propriedades termofísicas são consideradas constantes.

Para o problema transiente com geração volumétrica de calor e paredes mantidas sob a mesma temperatura, podemos reescrever as equações 3.8 e 3.9 da seguinte forma:

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = -Ra \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \text{ em } 1 < r < \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad t > 0, \quad (3.38a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + 1, \\ \text{em } 1 < r < \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad t > 0, \quad (3.38b)$$

onde η é o raio adimensional externo da cavidade e o raio de referência adotado na adimensionaização das equações é o raio interno da cavidade.

As equações governantes estão sujeitas às seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\psi(r, \theta, 0) = \psi_o, \quad T(r, \theta, 0) = T_o, \quad 1 \leq r \leq \eta, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (3.39a-b)$$

$$\psi(1, \theta, t) = \psi(\eta, \theta, t) = 0, \quad T(1, \theta, t) = T(\eta, \theta, t) = 0, \quad (3.39c-f)$$

$$\psi(r, \theta_1, t) = \psi(r, \theta_2, t) = 0, \quad \frac{\partial T(r, \theta_1, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r, \theta_2, t)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.39g-j)$$

3.5.1 Formulação em coordenada log-polar

Para simplificar os cálculos e eliminar a interdependência das coordenadas espaciais, foi adotada uma transformação em log-polar, conforme apresentado na Eq. (3.40a,b). Essa abordagem tem o objetivo de tornar a análise mais direta e eficiente, facilitando o tratamento das equações e a interpretação dos resultados.

A transformação log-polar é particularmente útil para sistemas que apresentam simetria radial, permitindo uma representação mais conveniente das variáveis espaciais e simplificando a resolução dos problemas estudados.

$$r = e^\xi \quad e \quad \xi = \ln r. \quad (3.40a,b)$$

A seguir, tem-se as equações que descrevem as relações relevantes.

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r} = e^{-\xi}, \quad (3.41a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{-\xi}) = -e^{-\xi} = -\frac{1}{r}. \quad (3.41b)$$

Sendo que, para qualquer função f , temos as seguintes relações:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (3.42a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r}, \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right), \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{3.42b}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}, \\
&= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.42c}$$

Ao aplicar a transformação log-polar às equações (3.38a) e (3.38b), obtém-se as seguintes expressões ajustadas:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) &= -e^\xi Ra \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \\
\text{em } 0 < \xi < \ln \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.43a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{2\xi} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + e^{2\xi}, \\
\text{em } 0 < \xi < \ln \eta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.43b)
\end{aligned}$$

Depois de aplicar a transformação log-polar, as equações governantes resultantes

são então submetidas às seguintes condições iniciais e de contorno, que devem ser cuidadosamente observadas e atendidas:

$$\psi(\xi, \theta, 0) = \psi_o, \quad T(\xi, \theta, 0) = T_o, \quad 0 \leq \xi \leq \ln \eta, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (3.44a-b)$$

$$\psi(0, \theta, t) = \psi(\ln \eta, \theta, t) = 0, \quad T(0, \theta, t) = T(\ln \eta, \theta, t) = 0, \quad (3.44c-f)$$

$$\psi(\xi, \theta_1, t) = \psi(\xi, \theta_2, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\xi, \theta_1, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(\xi, \theta_2, t)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.44g-j)$$

Vale ressaltar que o uso desta formulação log-polar é inédito; até o momento, não foram encontrados relatos na literatura sobre sua aplicação para a resolução deste tipo de problema.

3.5.2 Problemas auxiliares

Para a aplicação da técnica da transformada integral generalizada no caso transiente, os problemas auxiliares para as coordenadas ξ e θ , respectivamente, são definidos da seguinte forma:

$$\frac{d^2\Phi_i(\xi)}{d\xi^2} + \gamma_i^2\Phi_i(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < \Xi, \quad (3.45a)$$

$$\Phi_i(0) = 0, \quad \Phi_i(\Xi) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45b,c)$$

onde $\Xi = \ln \eta$, e

$$\frac{d^2\Phi_j^*(\theta)}{d\theta^2} + \lambda_j^2\Phi_j^*(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.45a)$$

$$\Phi_j^*(\theta_1) = 0, \quad \Phi_j^*(\theta_2) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45b,c)$$

para a função corrente ψ , e

$$\frac{d^2\Gamma_m(\xi)}{d\xi^2} + \alpha_m^2\Gamma_m(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < \Xi, \quad (3.46a)$$

$$\Gamma_m(0) = 0, \quad \Gamma_m(\Xi) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.46b,c)$$

$$\frac{d^2\Gamma_n^*(\theta)}{d\theta^2} + \beta_n^2\Gamma_n^*(\theta) = 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad (3.47a)$$

$$\frac{d\Gamma_n^*(\theta_1)}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\Gamma_n^*(\theta_2)}{d\theta} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.47b,c)$$

para a temperatura T , onde $\Phi_i(\xi)$, $\Phi_j^*(\theta)$, $\Gamma_m(\xi)$ $\Gamma_n^*(\theta)$ são as autofunções, γ_i , λ_j , α_m e β_n são os autovalores correspondentes.

As autofunções $\Phi_i(\xi)$ são dadas por

$$\Phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\Xi}} \sin(\gamma_i \xi), \quad \gamma_i = \frac{\pi i}{\Xi}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.48)$$

As autofunções $\Phi_j^*(\theta)$ são dadas por

$$\Phi_j^*(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \sin(\lambda_j \theta), \quad \lambda_j = \frac{\pi j}{\theta_f}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.49)$$

onde $\theta_f = \theta_2 - \theta_1$.

As autofunções $\Gamma_m(\xi)$ são dadas por

$$\Gamma_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\Xi}} \sin(\alpha_m \xi), \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{\Xi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.50a)$$

As autofunções $\Gamma_n^*(\theta)$ são dadas por

$$\Gamma_1^*(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta_f}}, \quad \beta_1 = 0, \quad (3.51a)$$

$$\Gamma_n^*(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta_f}} \cos(\beta_n \theta), \quad \beta_n = \frac{\pi(n-1)}{\theta_f}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.51b)$$

3.5.3 Transformada Integral Generalizada

Os problemas auxiliares permitem a definição do seguinte par de transformada integral para a função corrente e a temperatura, respectivamente:

$$\bar{\psi}_i(\theta, t) = \int_0^{\Xi} \Phi_i(\xi) \psi(\xi, \theta, t) d\xi, \quad \text{transformada em } \xi, \quad (3.52a)$$

$$\tilde{\psi}_{i,j}(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_j^*(\theta) \bar{\psi}_i(\theta, t) d\theta, \quad \text{transformada em } \theta, \quad (3.52b)$$

$$\psi(\xi, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_i(\xi) \Phi_j^*(\theta) \tilde{\psi}_{i,j}(t), \quad \text{inversa,} \quad (3.52c)$$

$$\bar{T}_m(\theta, t) = \int_0^{\Xi} e^{2\xi} \Gamma_m(\xi) T(\xi, \theta, t) d\xi, \quad \text{transformada em } \xi, \quad (3.53a)$$

$$\tilde{\bar{T}}_{m,n}(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n^*(\theta) \bar{T}_m(\theta, t) d\theta, \quad \text{transformada em } \theta, \quad (3.53b)$$

$$T(\xi, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_m(\xi) \Gamma_n^*(\theta) \tilde{\bar{T}}_{m,n}(t), \quad \text{inversa.} \quad (3.53c)$$

Aplicando a transformação na direção ' ξ ' e ' θ ', a Eq. (3.43a) é operada por $\int_0^{\Xi} \Phi_i(\xi) d\xi$ e $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_j^*(\theta) d\theta$, com a fórmulas inversas (3.52c) e (3.53c) aplicadas:

$$\frac{d\tilde{\psi}_{i,j}(t)}{dt} = \chi \left(\frac{Ra}{\gamma_i^2 + \lambda_j^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{ijmn} \tilde{\bar{T}}_{m,n}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{ijmn} \tilde{\bar{T}}_{m,n}(t) \right) - \tilde{\psi}_{i,j}(t) \right), \quad (3.54)$$

onde a condição inicial da função corrente transformada é

$$\tilde{\psi}_{ij} = \psi_0 f_{ij} \quad em \quad t = 0, \quad (3.55)$$

e os coeficientes f_{ij} , A_{ijmn} e B_{ijmn} são dados por

$$f_{ij} = \int_0^{\Xi} \Phi_i(\xi) d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_j^*(\theta) d\theta, \quad (3.56a)$$

$$A_{ijmn} = \int_0^{\Xi} e^{\xi} \Phi_i(\xi) \frac{d\Gamma_m(\xi)}{d\xi} d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_j^*(\theta) \Gamma_n^*(\theta) \sin(\theta) d\theta, \quad (3.56a)$$

$$B_{ijmn} = \int_0^{\Xi} e^{\xi} \Phi_i(\xi) \Gamma_m(\xi) d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Phi_j^*(\theta) \frac{d\Gamma_n^*(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) d\theta. \quad (3.56b)$$

Analogamente, a Eq. (3.43b) é operada por $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_m(\xi) d\xi$ e $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n^*(\theta) d\theta$, com as fórmulas inversas (3.52c) e (3.53c) devidamente aplicadas:

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i,m} \frac{d\tilde{\bar{T}}_{i,n}(t)}{dt} &= - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} C_{mni,jop} \tilde{\bar{\psi}}_{i,j}(t) \tilde{\bar{T}}_{o,p}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} D_{mni,jop} \tilde{\bar{\psi}}_{i,j}(t) \tilde{\bar{T}}_{o,p}(t) - (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \tilde{\bar{T}}_{m,n}(t) + f_{mn}^*, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde a condição inicial da temperatura transformada é

$$\tilde{\bar{T}}_{m,n} = T_o f_{mn}^* \quad em \quad t = 0, \quad (3.58)$$

e os coeficientes f_{mn}^* , $C_{mni,jop}$ e $D_{mni,jop}$ são dados por

$$f_{mn}^* = \int_0^{\Xi} e^{2\xi} \Gamma_m(\xi) d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n^*(\theta) d\theta, \quad (3.59a)$$

$$C_{mni,jop} = \int_0^{\Xi} \Gamma_m(\xi) \Phi_i(\xi) \frac{d\Gamma_o(\xi)}{d\xi} d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n^*(\theta) \frac{d\Phi_j^*(\theta)}{d\theta} \Gamma_p^*(\theta) d\theta, \quad (3.59b)$$

$$D_{mni,jop} = \int_0^{\Xi} \Gamma_m(\xi) \frac{d\Phi_i(\xi)}{d\xi} \Gamma_o(\xi) d\xi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma_n^*(\theta) \Phi_j^*(\theta) \frac{d\Gamma_p^*(\theta)}{d\theta} d\theta, \quad (3.59c)$$

$$M_{i,m} = \int_0^{\Xi} e^{2\xi} \Gamma_m(\xi) \Gamma_i(\xi) d\xi. \quad (3.59a)$$

Capítulo 4

Resultados e discussões

Neste capítulo são apresentados e discutidos as análises de convergência e demais resultados obtidos para os dois problemas que consideram a convecção natural em regime estacionário e para o problema da convecção natural em regime transiente.

4.1 Convecção natural em regime estacionário com geração volumétrica de calor

Para o problema de convecção natural em uma cavidade anular horizontal, onde ocorre uma geração volumétrica interna de calor, são apresentados diversos resultados numéricos detalhados. Esses resultados abrangem diferentes valores para o número de Rayleigh, com os valores sendo $Ra = 10, 50, 100, 500, 1000, 2000$, e 5000. Além disso, foram considerados dois valores distintos para o raio interno adimensional, que são $\eta = 0,25$ e $\eta = 0,5$. A análise também leva em conta diferentes ângulos do setor anular, especificamente $\theta_1 = 0$ e θ_f com os valores de $\theta_2 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e π . Esses dados proporcionam uma visão abrangente sobre como as variações de diversos parâmetros afetam o comportamento da convecção natural e a distribuição térmica dentro da cavidade anular horizontal.

4.1.1 Análise de convergência

A convergência para a temperatura e função corrente são apresentadas na tabela 4.1 e 4.2, para $Ra = 100$, $\eta=0.5$, e $\theta_f = \pi$, onde a ordem de truncamento para as expansões N , varia de 10 a 40. Os valores de temperatura e função corrente são apresentados para diferentes localidades da geometria anular, com r variando de $\eta=0,5$ a 1 e θ de 0 a π . Pode-se perceber na tabela 4.1 que a temperatura convergiu para quatro dígitos quando a ordem de truncamento das expansões $N = 20$. Tabela 4.2 apresenta a análise de convergência da função corrente que também ocorre para $N = 20$.

Tabela 4.1: Convergência da temperatura para $Ra = 100$, $\eta=0,5$ e $\theta_f = \pi$.

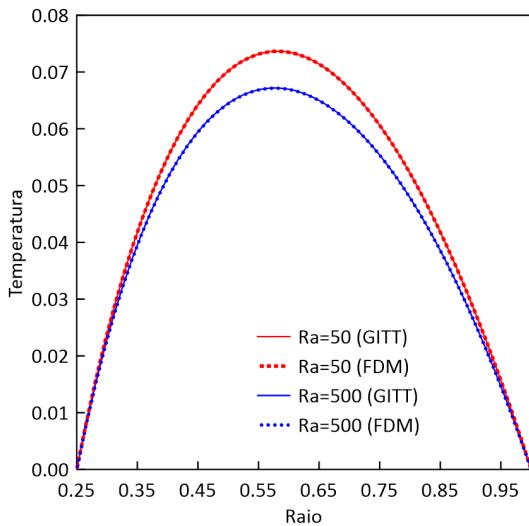
θ	N	$r = 0,6$	$r = 0,7$	$r = 0,75$	$r = 0,8$	$r = 0,9$
0	10	0,02158	0,03075	0,03128	0,02936	0,01879
	20	0,02159	0,03076	0,03129	0,02937	0,01879
	30	0,02159	0,03076	0,03129	0,02937	0,01879
	40	0,02159	0,03076	0,03129	0,02937	0,01879
$\frac{\pi}{4}$	10	0,02164	0,03082	0,03135	0,02944	0,01884
	20	0,02165	0,03083	0,03136	0,02944	0,01885
	30	0,02166	0,03083	0,03136	0,02945	0,01885
	40	0,02166	0,03083	0,03137	0,02945	0,01885
$\frac{\pi}{3}$	10	0,02169	0,03087	0,03141	0,02949	0,01889
	20	0,02170	0,03088	0,03142	0,02950	0,01889
	30	0,02170	0,03088	0,03142	0,02950	0,01889
	40	0,02170	0,03088	0,03142	0,02950	0,01889
$\frac{\pi}{2}$	10	0,02180	0,03100	0,03154	0,02962	0,01899
	20	0,02181	0,03101	0,03155	0,02963	0,01899
	30	0,02181	0,03101	0,03155	0,02963	0,01899
	40	0,02181	0,03101	0,03155	0,02963	0,01900
π	10	0,02204	0,03127	0,03181	0,02990	0,01921
	20	0,02204	0,03128	0,03182	0,02991	0,01921
	30	0,02205	0,03128	0,03182	0,02991	0,01921
	40	0,02205	0,03128	0,03182	0,02991	0,01921

Tabela 4.2: Convergência da função corrente com $Ra = 100$, $\eta = 0,5$ e $\theta_f = \pi$.

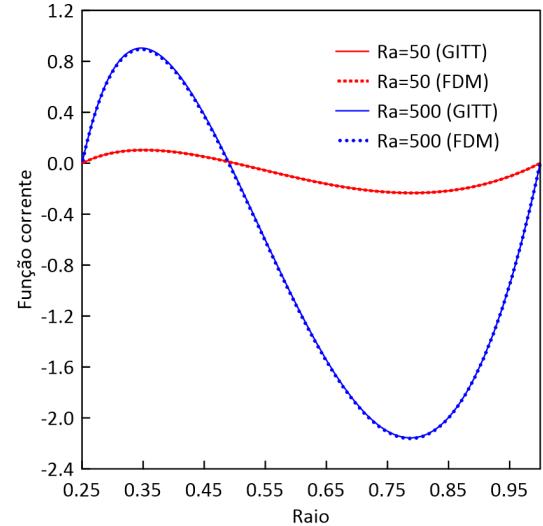
θ	N	$r = 0,6$	$r = 0,7$	$r = 0,75$	$r = 0,8$	$r = 0,9$
$\frac{\pi}{4}$	10	0,0567	0,0068	-0,0293	-0,0609	-0,0807
	20	0,0559	0,0058	-0,0303	-0,0618	-0,0812
	30	0,0558	0,0056	-0,0304	-0,0619	-0,0813
	40	0,0558	0,0056	-0,0305	-0,0620	-0,0814
$\frac{\pi}{3}$	10	0,0694	0,0082	-0,0361	-0,0748	-0,0990
	20	0,0685	0,0070	-0,0373	-0,0759	-0,0997
	30	0,0683	0,0068	-0,0375	-0,0761	-0,0998
	40	0,0683	0,0067	-0,0375	-0,0761	-0,0999
$\frac{\pi}{2}$	10	0,0801	0,0090	-0,0422	-0,0870	-0,1150
	20	0,0791	0,0077	-0,0436	-0,0882	-0,1158
	30	0,0789	0,0074	-0,0438	-0,0885	-0,1159
	40	0,0788	0,0073	-0,0439	-0,0885	-0,1160

4.1.2 Resultados

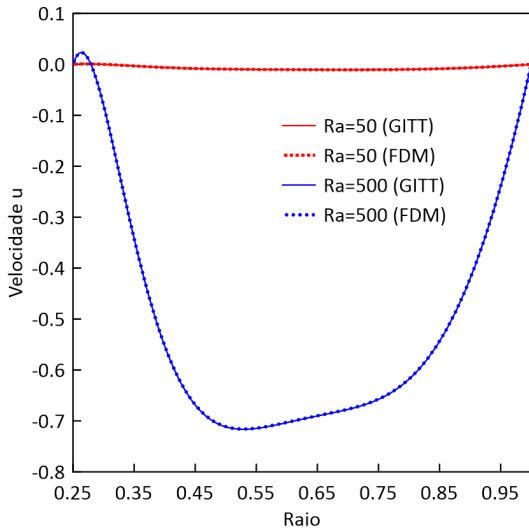
As figuras 4.1(a) a 4.1(d) mostram a comparação entre os resultados obtidos com a técnica da transformada integral generalizada (GITT) e o método de diferenças finitas (FDM), o qual foi implementado para validar as soluções por GITT. Os perfis de temperatura, função corrente, velocidade radial e velocidade angular ao longo da linha central da cavidade ($\theta = \frac{\pi}{2}$) foram analisados considerando $\eta = 0,25$, $N = 20$, $Ra = 50$ e 500 . Pode-se perceber que os resultados para ambos os métodos estão em excelente concordância.



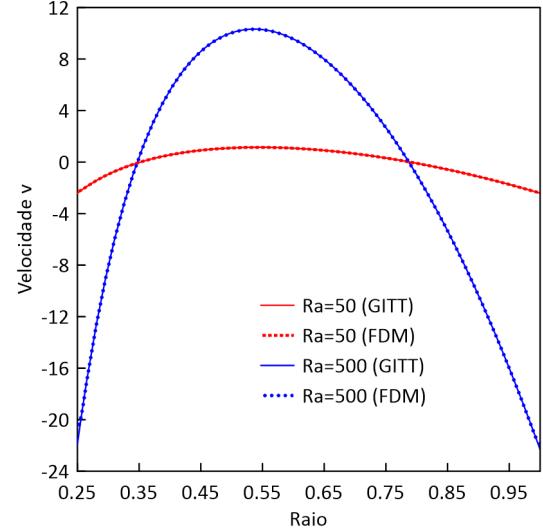
(a) Perfil de temperatura em $\theta = \frac{\pi}{2}$.



(b) Perfil de função corrente em $\theta = \frac{\pi}{2}$.



(c) Perfil de velocidade radial em $\theta = \frac{\pi}{2}$.



(d) Perfil de velocidade angular em $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Figura 4.1: Comparação da solução por GITT com FDM para $\theta = \pi/2$, $\eta = 0, 25$, $\theta_f = \pi$, $Ra = 50$ e 500 .

A figura 4.2 apresenta a comparação dos perfis de temperatura ao longo de posições angulares diferentes para $\theta_f = \pi$, $\eta = 0,5$, e $Ra = 4000$, com os resultados encontrados na literatura [38] ($Ra' = 500$ e $R = r_o/r_i = 0.5$ quando baseado no raio interno r_i). Pode-se notar que VASSEUR *et al.* [38] considerou a convecção natural em regime estacionário, com escoamento laminar, em uma cavidade bidimensional com uma camada porosa delimitada por dois cilindros concêntricos horizontais, e a coordenada angular é igual a zero no topo da cavidade, e π no fundo. O caso de condução pura é também apresentado, para fins de comparação. Pode-se perceber que os resultados pela GITT estão em excelente concordância com os resultados obtidos por VASSEUR *et al.* [38]. Em qualquer posição radial, a temperatura diminui no fundo da cavidade e aumenta no topo, onde é maior que a temperatura sob condição puramente condutiva. A convecção leva fluido frio para regiões mais quentes, quando se move na direção do aumento da temperatura, e leva fluido quente para as regiões mais frias, quando se move na direção da redução de temperatura.

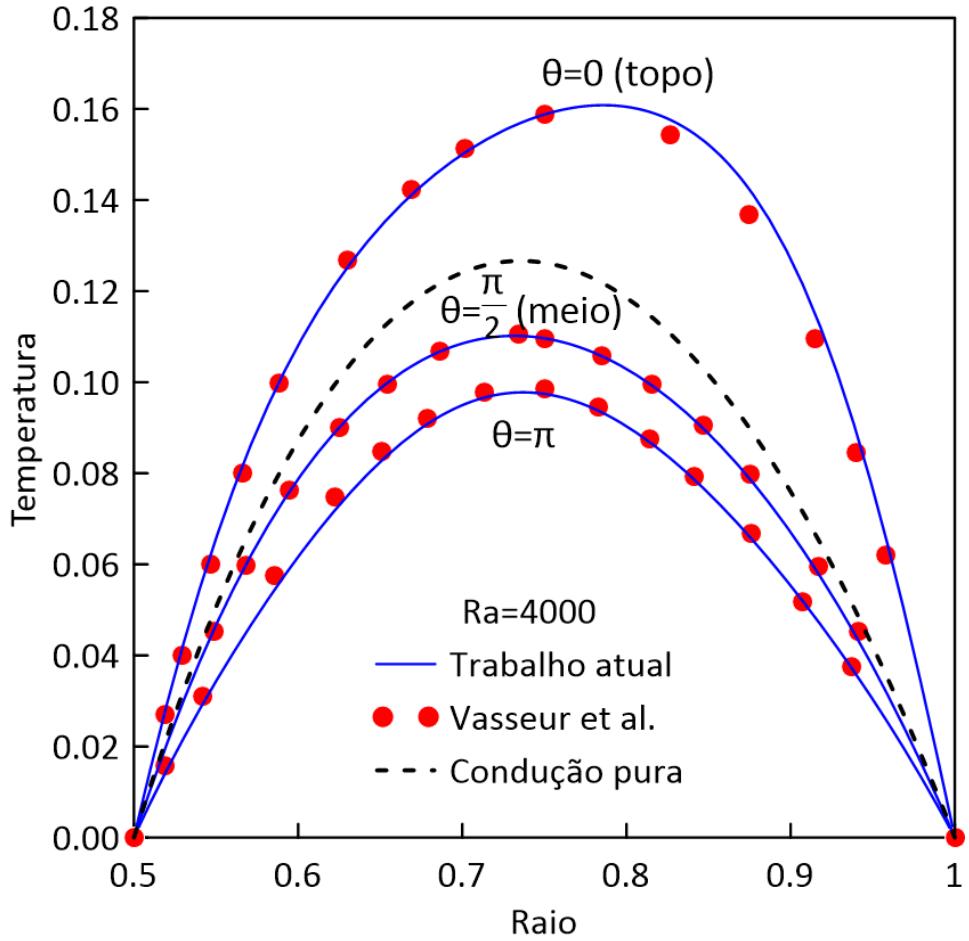


Figura 4.2: Comparação da solução via GITT com resultados da literatura: perfil de temperatura ao longo de diferentes posições angulares para $Ra = 4000$.

A tabela 4.3 apresenta a comparação dos valores da função corrente máxima e mínima obtidos no trabalho atual com os obtidos por VASSEUR *et al.* [38].

Tabela 4.3: Comparação da função corrente para diferentes números de Rayleigh.

Ra	ψ_{max}		ψ_{min}	
	Trabalho atual	Vasseur[38]	Trabalho atual	Vasseur[38]
400	0,4789	0,476	-0,3195	-0,320
4000	4,3544	4,34	-2,6801	-2,67
16000	12,3986	12,5	-7,2309	-7,23

As figuras 4.3 e 4.4 mostram respectivamente a distribuição radial de temperatura e de função corrente em $\theta = \pi/2$ para número de Rayleigh variando de 10 a 5000, $\eta = 0,5$, $\theta_f = \pi$. Conforme Ra aumenta de 10 até 5000, a temperatura no meio da cavidade diminui e o perfil de temperatura muda gradualmente para uma curva menos acentuada, com a temperatura máxima na região central e duas camadas limites caracterizadas por um forte gradiente de temperatura. Conforme Ra aumenta podemos observar a formação de picos mais intensos na função corrente, e quando o Rayleigh diminui os valores de pico são menores e as curvas são consideravelmente mais suaves.

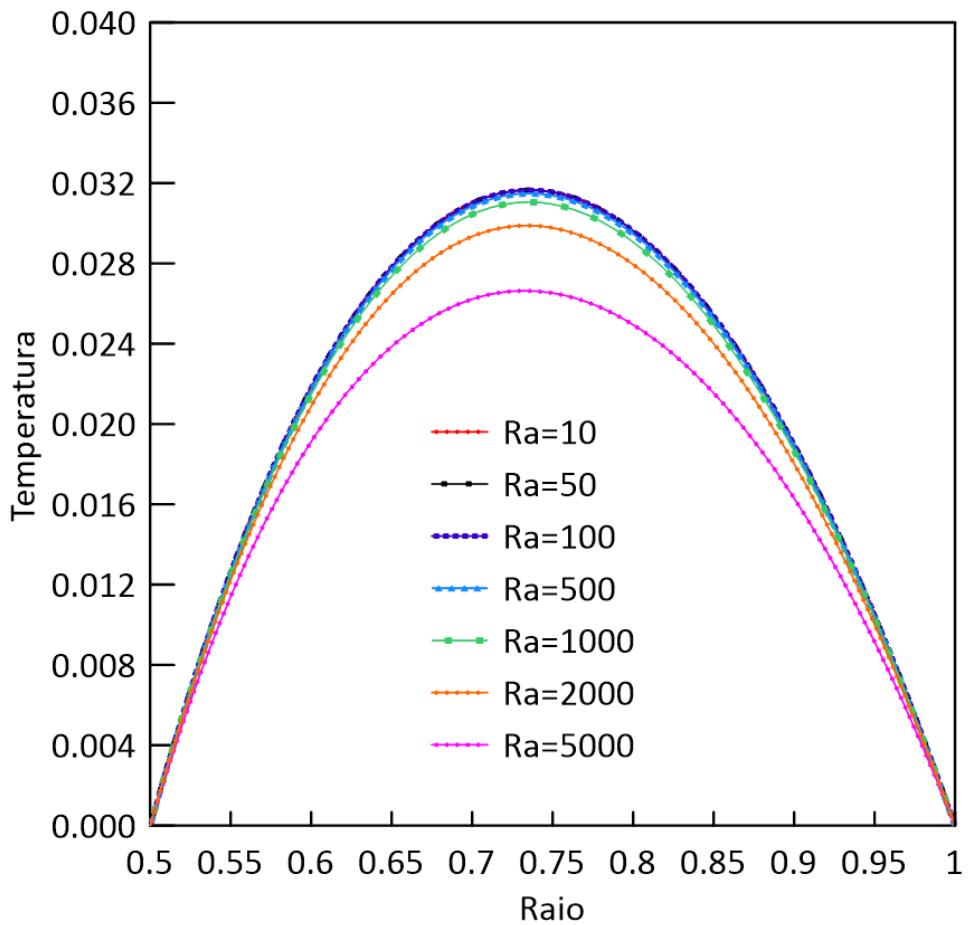


Figura 4.3: Distribuição radial de temperatura em $\theta = \pi/2$ para números de Rayleigh variando de 10 a 5000, $\eta = 0,5$ e $\theta_f = \pi$.

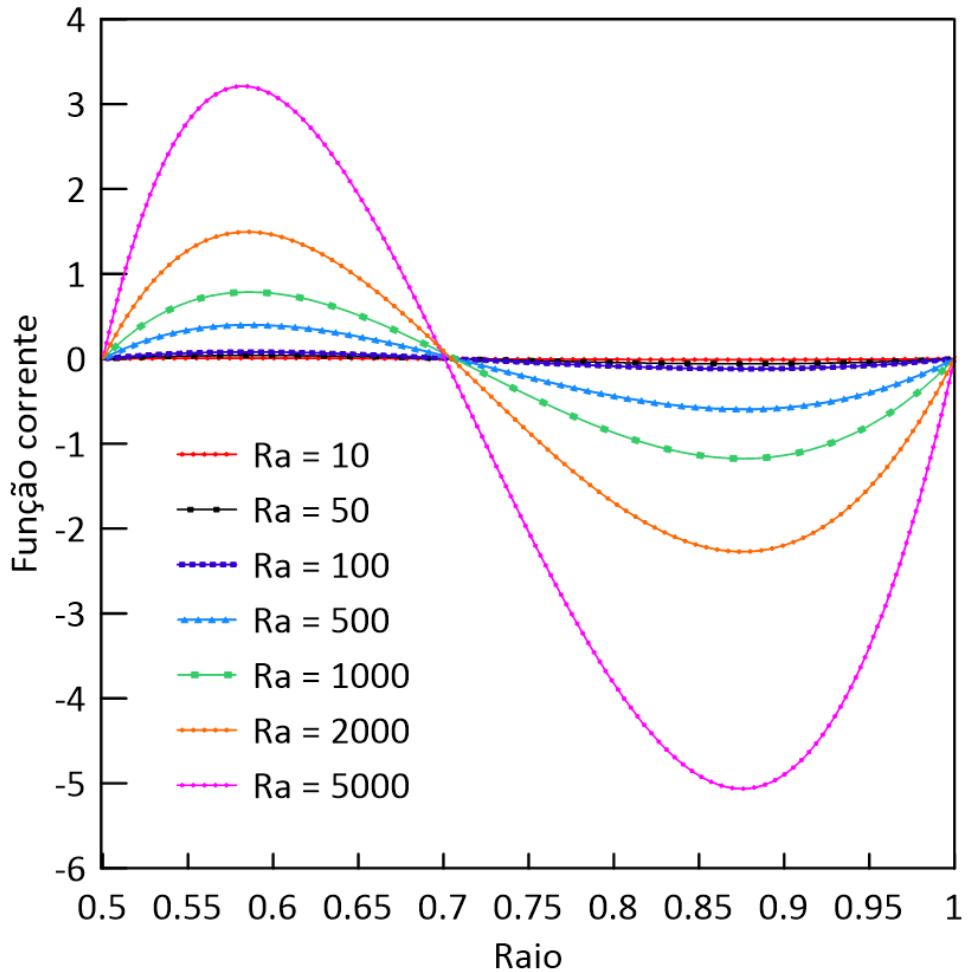


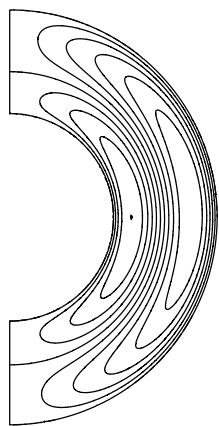
Figura 4.4: Distribuição radial de função corrente em $\theta = \pi/2$ para números de Rayleigh variando de 10 a 5000, $\eta = 0,5$ e $\theta_f = \pi$.

A tabela 4.4 apresenta a temperatura máxima, função corrente máxima e mínima, para uma razão de raio, neste caso, um raio adimensional interno $\eta = 0,5$ e cinco ângulos diferentes do setor anular ($\theta_f = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$) e para números de Rayleigh iguais a 500, 1000 e 2000. Neste caso, ψ_{max} e ψ_{min} são os valores máximo e mínimo, respectivamente, da função corrente nos centros dos vórtices no sentido horário e anti-horário, e T_{max} é a temperatura máxima, localizada no centro dos vórtices.

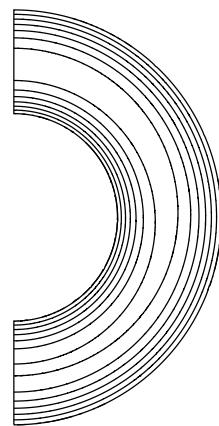
Tabela 4.4: Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com diferentes tamanhos e números de Rayleigh, para raio interno adimensional $\eta = 0,5$.

Ra	$\theta_f = \pi$	$\theta_f = \frac{\pi}{2}$	$\theta_f = \frac{\pi}{3}$	$\theta_f = \frac{\pi}{4}$	$\theta_f = \frac{\pi}{6}$
T_{max}					
500	0,0330	0,0347	0,0337	0,0330	0,0323
1000	0,0345	0,0365	0,0351	0,0340	0,0327
2000	0,0372	0,0370	0,0356	0,0346	0,0331
ψ_{max}					
500	0,3985	0,3892	0,2960	0,2146	0,1173
1000	0,7828	0,7928	0,6550	0,4988	0,2813
2000	1,4891	1,5383	1,4264	1,2072	0,7909
ψ_{min}					
500	-0,5980	-0,5274	-0,3469	-0,2363	-0,1282
1000	-1,1859	-1,0184	-0,6368	-0,4223	-0,2260
2000	-2,3137	-1,8683	-1,0899	-0,6897	-0,3574

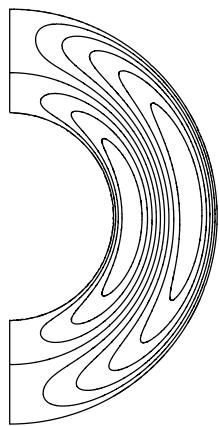
As figuras 4.5, 4.6 e 4.7 mostram linhas de fluxo e isotermas de setores anulares com ângulos $\theta_f = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, para números de Rayleigh $Ra = 500, 1000, 2000$, e raio adimensional interno $\eta = 0.5$. É possível observar que, próximo às paredes interna e externa do setor anular, a convecção torna-se mais importante e as isotermas se aproximam. Conforme o Ra aumenta, os vórtices são mais proeminentes e os valores da função corrente aumentam. A temperatura máxima é observada próxima da linha central da cavidade e decresce nas paredes interna e externa. Uma diferença maior de temperatura pode ser observada entre a parte superior e a parte inferior do espaço anular, uma vez que mais calor é transportado para cima devido à circulação do fluido. À medida que o ângulo final diminui e, consequentemente, o setor anular analisado é menor, o valor máximo da temperatura observada também diminui, assim como o valor máximo da função corrente.



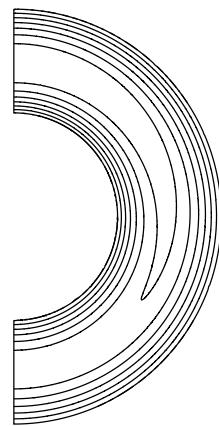
(a) Função corrente, $Ra = 500$



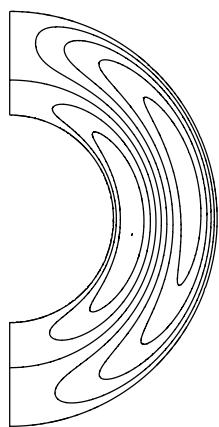
(b) Temperatura, $Ra = 500$



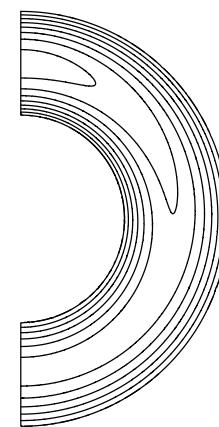
(c) Função corrente, $Ra = 1000$



(d) Temperatura, $Ra = 1000$



(e) Função corrente, $Ra = 2000$



(f) Temperatura, $Ra = 2000$

Figura 4.5: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0, 5$, $\theta_f = \pi$).

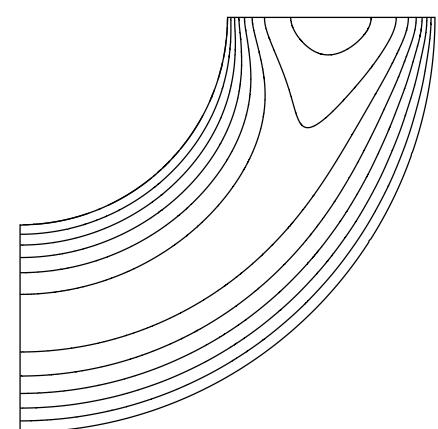
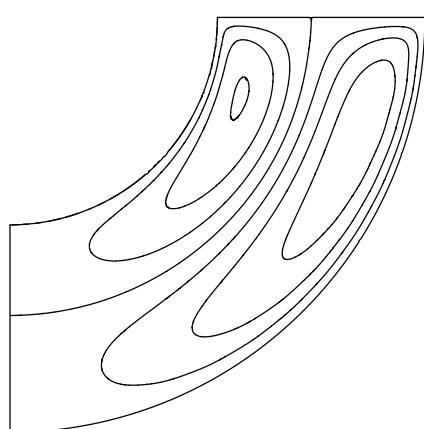
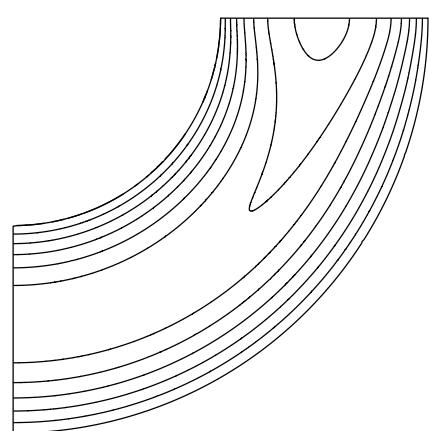
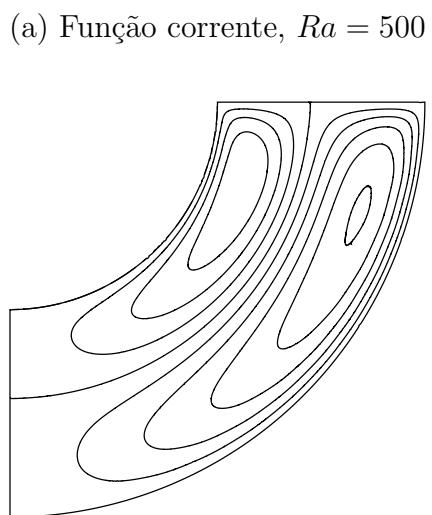
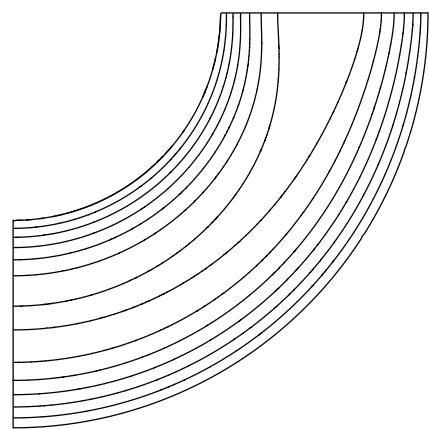
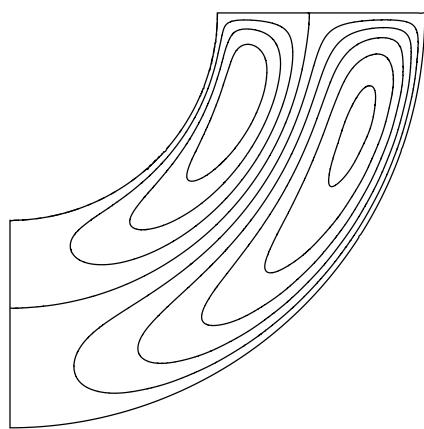
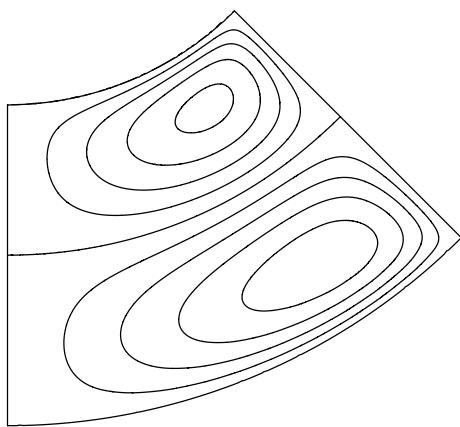
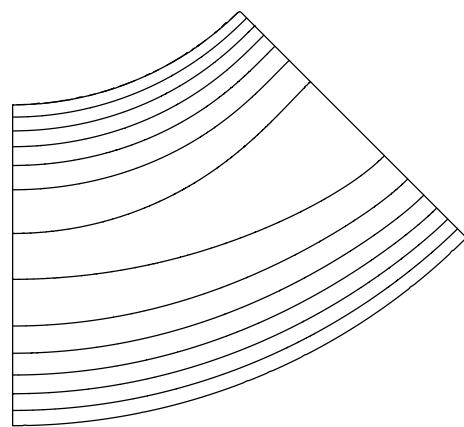


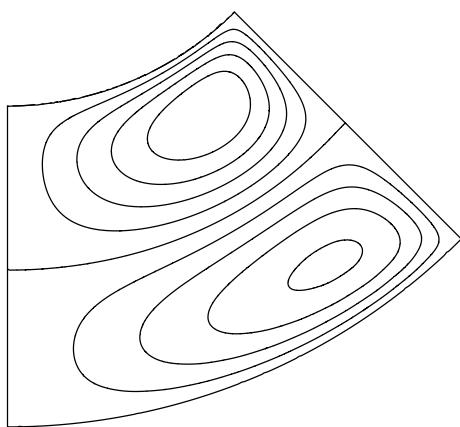
Figura 4.6: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0,5$, $\theta_f = \frac{\pi}{2}$).



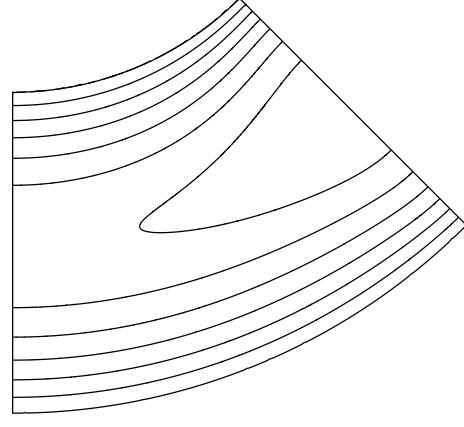
(a) Função corrente, $Ra = 500$



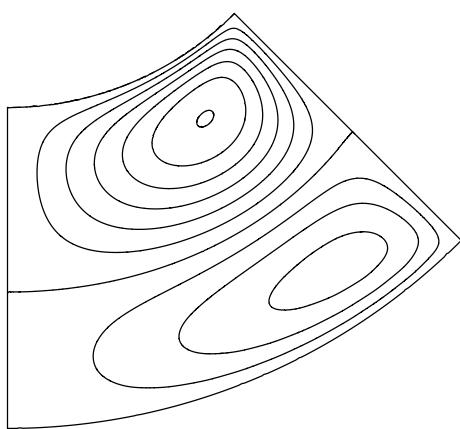
(b) Temperatura, $Ra = 500$



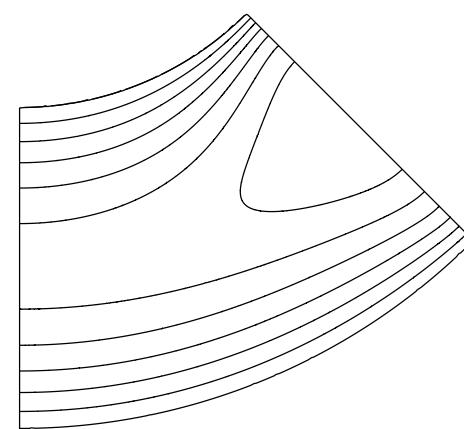
(c) Função corrente, $Ra = 1000$



(d) Temperatura, $Ra = 1000$



(e) Função corrente, $Ra = 2000$



(f) Temperatura, $Ra = 2000$

Figura 4.7: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($\eta = 0,5$, $\theta_f = \frac{\pi}{4}$).

A figura 4.8 apresenta a temperatura máxima T_{\max} como função do número de Rayleigh Ra , para setores anulares com $\theta_f = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$, raio interno adimensional $\eta = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$, e Ra até 10^4 . É possível observar que para uma dada combinação de θ_f e η , a temperatura máxima T_{\max} primeiramente aumenta com o aumento do Ra , atinge um pico, e então diminui. Quanto maior o ângulo do setor anular θ_f , maior o valor do pico de T_{\max} . O pico T_{\max} ocorre para um valor de Ra muito maior para $\theta_f = \pi$ do que para outros θ_f investigados. Esta tendência é invertida para $\theta_f = \pi/2$ e menores que este valor: o pico T_{\max} ocorre para um Ra ligeiramente superior para um θ_f menor. Quando o raio adimensional interno η aumenta, consequentemente estreitando a cavidade, o pico T_{\max} ocorre para um valor de Ra superior para um mesmo θ_f . Enquanto T_{\max} se afasta do modo de condução para valores de Ra pequenos para todos os θ_f , a partida é mais significante para maiores θ_f do que para menores θ_f .

A figura 4.9 mostra os fluxos de calor normalizados pelos respectivos fluxos de calor do modo de condução nas superfícies interna e externa como uma função de Ra , para ângulos do setor anular iguais a $\theta_f = \pi/4, \pi/2, \pi$, raios adimensionais internos iguais a $\eta = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$, e Ra até 10^4 . Pode-se perceber que para $\theta_f = \pi/4$, o fluxo de calor normalizado na superfície interna do setor anular aumenta com o aumento de Ra , enquanto o fluxo de calor normalizado na superfície externa diminui para todos os raios adimensionais internos analisados. Uma tendência oposta pode ser percebida para $\theta_f = \pi$: o fluxo de calor normalizado na superfície interna diminui enquanto o fluxo de calor na superfície externa aumenta. Para um ângulo intermediário $\theta_f = \pi/2$, o fluxo de calor normalizado na superfície interna primeiro diminui ligeiramente e depois aumenta com o aumento de Ra , enquanto o fluxo de calor normalizado na superfície externa primeiro aumenta ligeiramente antes de diminuir com o aumento de Ra . Ao comparar as figuras 4.9(a), (c) e (e), pode-se notar

que o distanciamento dos fluxos de calor em modo condutivo são muito maiores para $\theta_f = \pi/4$ do que $\theta_f = \pi/2$ e π . Pode-se concluir que o ângulo θ_f afeta fortemente a partição de transferência de calor nas superfícies interna e externa da cavidade porosa em forma de setor anular com geração de calor interna constante.

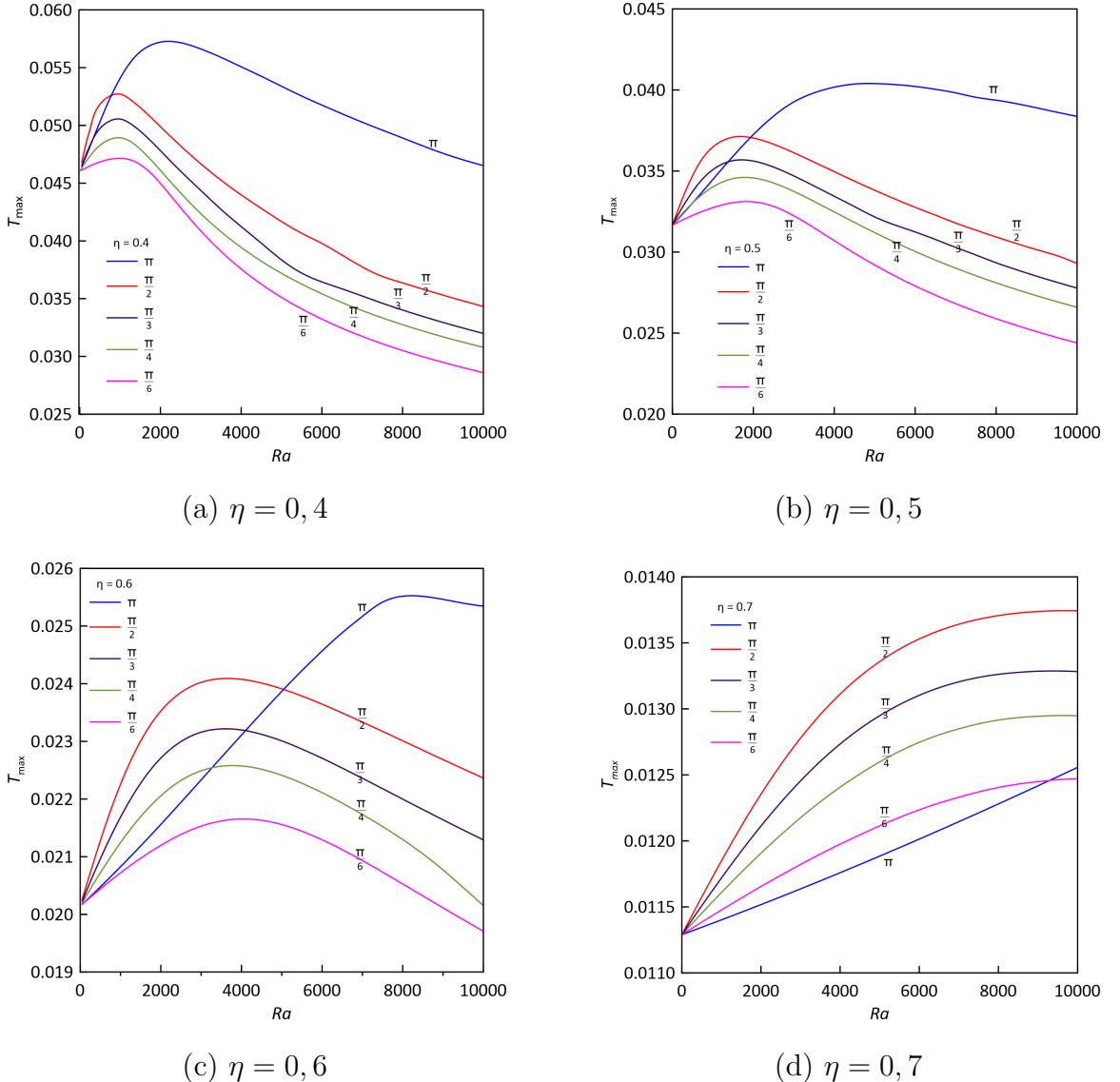
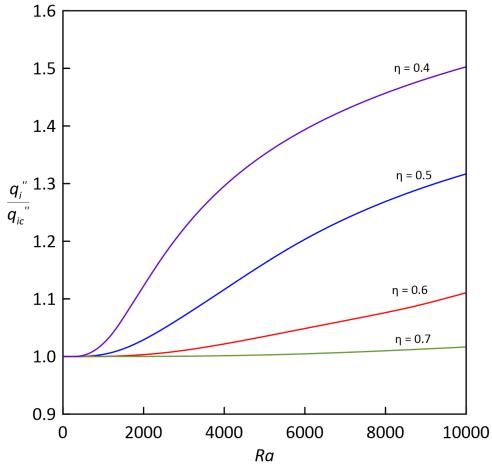
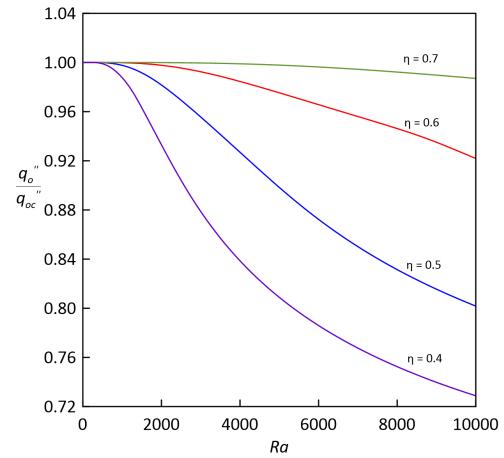


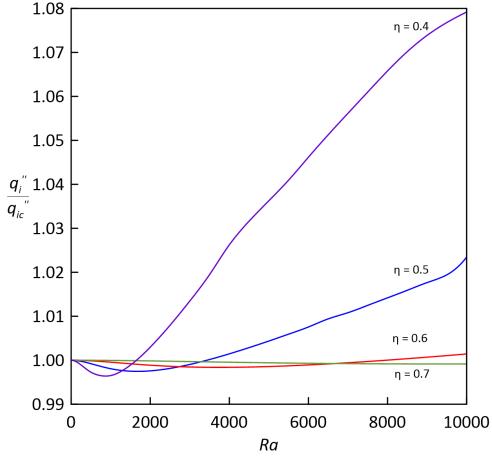
Figura 4.8: Temperatura máxima em função do número de Rayleigh Ra para ângulos do setor anular $\theta_f = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, e para raios adimensionais internos (a) $\eta = 0,4$, (b) $\eta = 0,5$, (c) $\eta = 0,6$, and (d) $\eta = 0,7$.



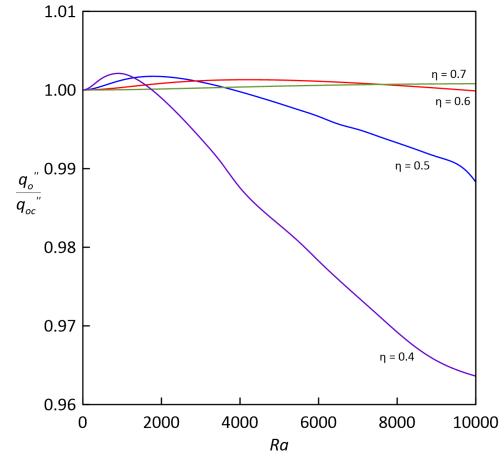
(a) Superfície interna, $\theta_f = \pi/4$



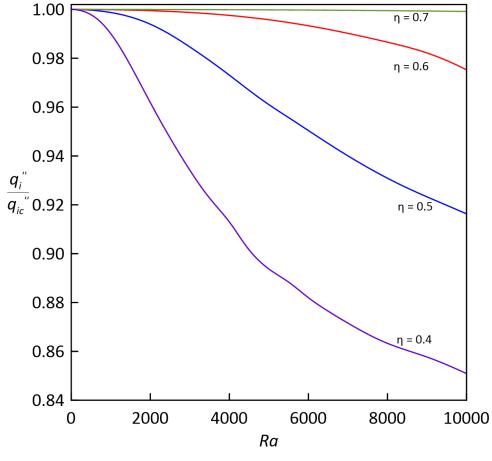
(b) Superfície externa, $\theta_f = \pi/4$



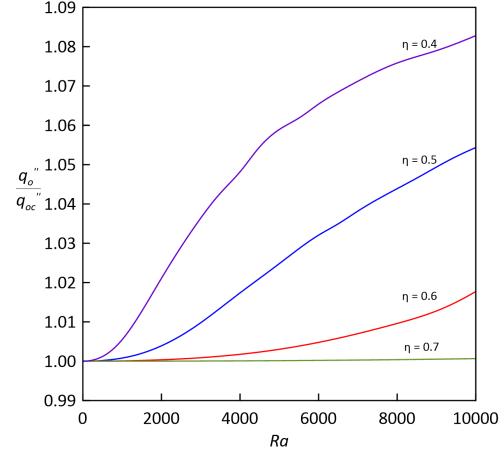
(c) Superfície interna, $\theta_f = \pi/2$



(d) Superfície externa, $\theta_f = \pi/2$



(e) Superfície interna, $\theta_f = \pi$



(f) Superfície externa, $\theta_f = \pi$

Figura 4.9: Fluxo de calor normalizado na superfície interna e externa como função do número de Rayleigh Ra para raios adimensionais internos $\eta = 0,4, 0,5, 0,6, 0,7$, e ângulos do setor anular $\theta_f = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e π .

4.1.3 Conclusões

A técnica conhecida como Transformada Integral Generalizada, que é um método que combina aspectos analíticos e numéricos de forma híbrida, foi proposta para realizar uma investigação detalhada sobre a convecção natural em um setor anular horizontal preenchido por meio poroso e sujeito a uma geração interna uniforme de calor.

Os resultados numéricos obtidos demonstram uma excelente convergência tanto para a função temperatura quanto para a função corrente, enquanto o custo computacional associado é relativamente baixo. As soluções geradas por meio da técnica de transformada integral foram co-validada com os resultados obtidos através do método das diferenças finitas, confirmando assim a eficácia e a precisão do método proposto para resolver este problema específico.

Além disso, o método sugerido foi validado ao ser comparado com um caso previamente publicado na literatura, mostrando uma excelente concordância para o campo de temperatura.

Os efeitos do aumento do número de Rayleigh tornam-se mais perceptíveis na função corrente e, consequentemente, nas velocidades radial e angular, enquanto a influência sobre a temperatura é menos significativa. À medida que o ângulo final é reduzido de π para $\frac{\pi}{4}$, foi possível observar uma diminuição tanto no valor da temperatura máxima quanto no valor da função corrente.

Embora a presença das duas estruturas vorticais em contra-rotação seja uma característica comum para todos os ângulos do setor anular investigados, o tamanho relativo desses dois vórtices varia com a diminuição do ângulo do setor. Especificamente, o vórtice localizado mais próximo ao raio externo da cavidade tende a se tornar dominante. Além disso, o ângulo do setor anular exerce um impacto significativo sobre o valor da temperatura máxima e a partição da transferência de calor

na superfície interna e na superfície externa do setor anular, que contém um meio poroso com geração de calor.

4.2 Convecção natural em regime estacionário com aquecimento diferenciado

No contexto do problema de convecção natural em uma cavidade anular horizontal, onde ocorre um aquecimento diferenciado, foram apresentados diversos resultados numéricos e gráficos. Esses resultados incluem a análise da temperatura, da função corrente e do número de Nusselt. Foram considerados diferentes valores para o número de Rayleigh, que variam de 5 a 200, e dois valores distintos para o raio externo adimensional, que são $\eta = 2,0$ e $\eta = 2,5$. Além disso, os ângulos do setor anular foram analisados em profundidade, incluindo os valores de $\theta_1 = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ e $\theta_f = \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, e π . Esses resultados oferecem uma visão detalhada das variáveis envolvidas e suas interações no comportamento da convecção natural dentro da cavidade anular horizontal.

4.2.1 Análise de convergência

A convergência para a temperatura e função corrente são apresentadas na tabela 4.5 e tabela 4.6, respectivamente, para $Ra = 50, 60, 70, 80, 90$ e 100 , raios adimensionais externos $\eta = 2$, e $\theta_f = \pi$, onde a ordem de truncamento para as expansões N varia de 10 a 40. Os valores de temperatura e função corrente são apresentados em diferentes localizações da geometria anular, onde $r = 1, 25, 1, 50$ e $1, 75$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Pode-se perceber na tabela 4.5 que a temperatura convergiu para quatro dígitos com a ordem de truncamento $N = 25$. O mesmo comportamento é observado para a função corrente na tabela 4.6, onde a convergência também ocorre para $N = 25$.

Tabela 4.5: Análise de convergência da temperatura para diferentes posições no eixo radial e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ra	N	$r = 1,25$	$r = 1,50$	$r = 1,75$
50	10	0,5976	0,3630	0,1792
	15	0,6019	0,3694	0,1842
	20	0,6015	0,3691	0,1842
	25	0,6016	0,3693	0,1844
	40	0,6016	0,3693	0,1843
60	10	0,5777	0,3526	0,1780
	15	0,5810	0,3573	0,1820
	20	0,5809	0,3572	0,1820
	25	0,5809	0,3573	0,1820
	40	0,5809	0,3573	0,1820
70	10	0,5594	0,3442	0,1778
	15	0,5626	0,3491	0,1820
	20	0,5623	0,3488	0,1819
	25	0,5623	0,3488	0,1818
	40	0,5623	0,3488	0,1818
80	10	0,5427	0,3376	0,1785
	15	0,5460	0,3424	0,1826
	20	0,5455	0,3419	0,1823
	25	0,5454	0,3418	0,1822
	40	0,5454	0,3418	0,1822
90	10	0,5278	0,3326	0,1799
	15	0,5311	0,3375	0,1842
	20	0,5304	0,3367	0,1837
	25	0,5303	0,3365	0,1834
	40	0,5303	0,3365	0,1834
100	10	0,5144	0,3288	0,1818
	15	0,5179	0,3338	0,1863
	20	0,5169	0,3327	0,1855
	25	0,5168	0,3324	0,1852
	40	0,5167	0,3324	0,1852

Tabela 4.6: Análise de convergência da função corrente para diferentes posições no eixo radial e $\theta = \frac{\pi}{2}$

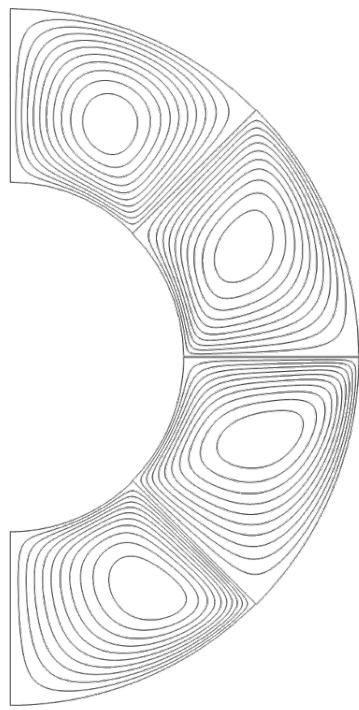
Ra	N	$r = 1,25$	$r = 1,50$	$r = 1,75$
50	10	-4,7534	-5,3052	-3,5682
	15	-4,7348	-5,3098	-3,5949
	20	-4,7354	-5,3094	-3,5946
	25	-4,7350	-5,3099	-3,5957
	40	-4,7351	-5,3097	-3,5955
60	10	-5,6178	-6,1832	-4,1625
	15	-5,5967	-6,1804	-4,1829
	20	-5,5969	-6,1803	-4,1826
	25	-5,5965	-6,1801	-4,1828
	40	-5,5965	-6,1801	-4,1828
70	10	-6,4457	-7,0058	-4,7277
	15	-6,4183	-6,9982	-4,7486
	20	-6,4196	-6,9981	-4,7475
	25	-6,4197	-6,9982	-4,7474
	40	-6,4197	-6,9982	-4,7474
80	10	-7,2375	-7,7793	-5,2694
	15	-7,2075	-7,7705	-5,2919
	20	-7,2106	-7,7708	-5,2897
	25	-7,2108	-7,7710	-5,2893
	40	-7,2108	-7,7710	-5,2893
90	10	-7,9949	-8,5099	-5,7919
	15	-7,9609	-8,4994	-5,8173
	20	-7,9663	-8,5003	-5,8133
	25	-7,9670	-8,5008	-5,8126
	40	-7,9671	-8,5008	-5,8126
100	10	-8,7199	-9,2029	-6,2986
	15	-8,6816	-9,1906	-6,3273
	20	-8,6898	-9,1922	-6,3212
	25	-8,6914	-9,1930	-6,3198
	40	-8,6916	-9,1931	-6,3197

4.2.2 Resultados

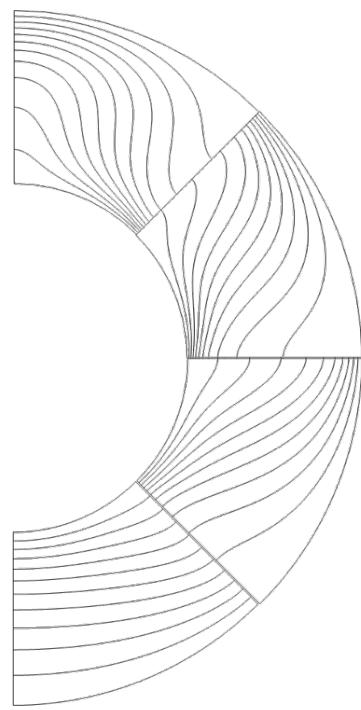
As figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostram o fenômeno das soluções duplas observadas para temperatura e função corrente, quando o número de Rayleigh (Ra) vale 50, o raio adimensional externo (η) é igual a 2, o ângulo θ_1 igual a zero e o ângulo θ_f assume os valores de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e π , onde um mesmo número de Rayleigh pode gerar soluções bicelulares ou unicelulares, dependendo das condições iniciais da simulação.

Dois tipos de padrões de fluxo podem ser observados quando o número de Rayleigh ultrapassa um valor crítico: o primeiro é o padrão de vórtice em forma de crescente na partição superior da cavidade, no qual o fluido na parte superior da partição ascende, e o segundo é o fluxo no qual o fluido desce, formando dois vórtices em sentido contrário na parte superior da cavidade.

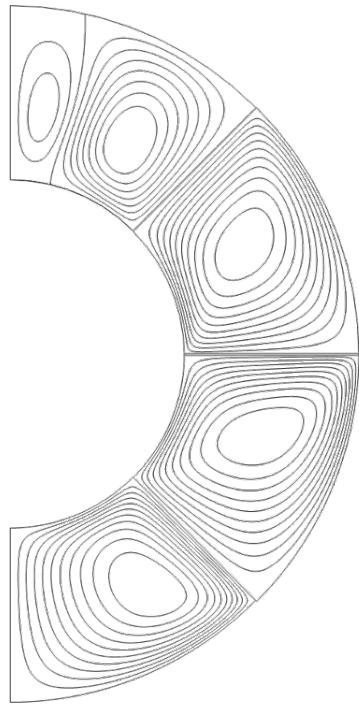
É possível observar que, mesmo alterando o número de partições, as soluções para temperatura e função corrente mudam apenas no topo da cavidade de acordo com as diferentes condições iniciais quando uma combinação específica de parâmetros é considerada.



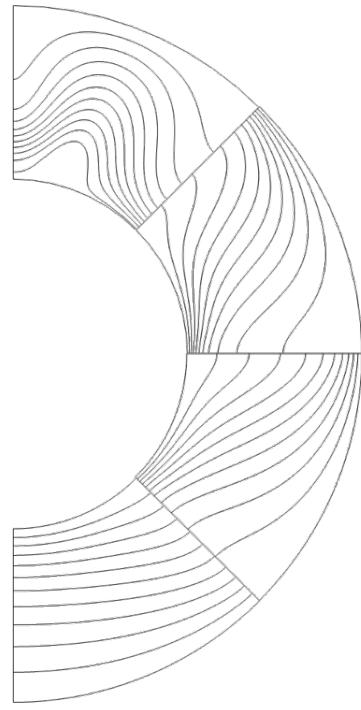
(a) Função corrente, solução unicelular.



(b) Temperatura, solução unicelular.

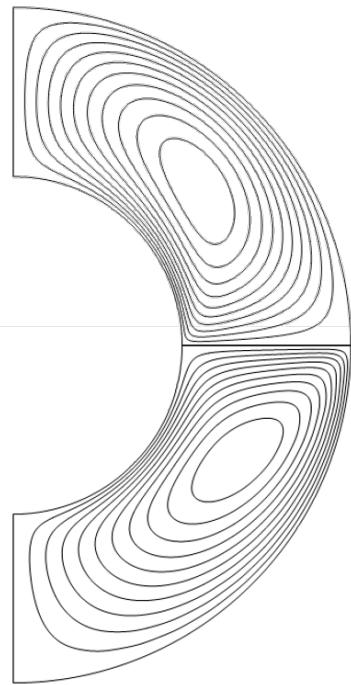


(c) Função corrente, solução bicelular.

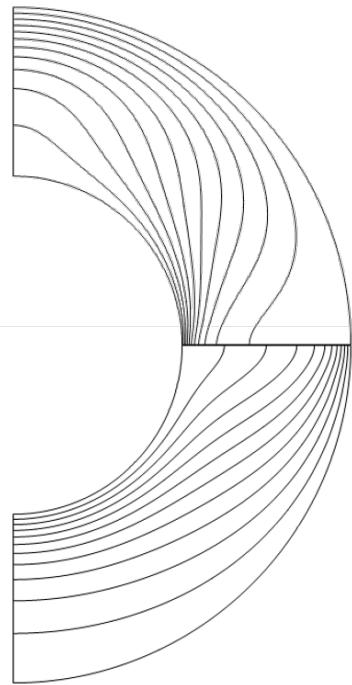


(d) Temperatura, solução bicelular.

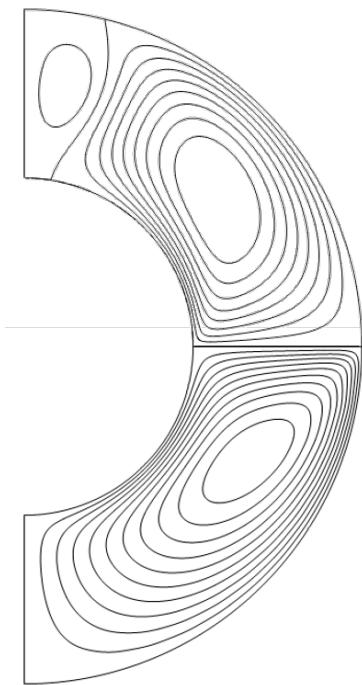
Figura 4.10: Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, $\eta = 2$, $\theta_f = \frac{\pi}{4}$ e $Ra = 50$.



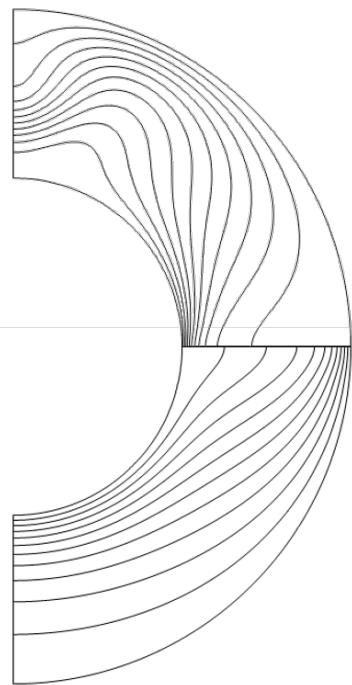
(a) Função corrente, solução unicelular.



(b) Temperatura, solução unicelular.

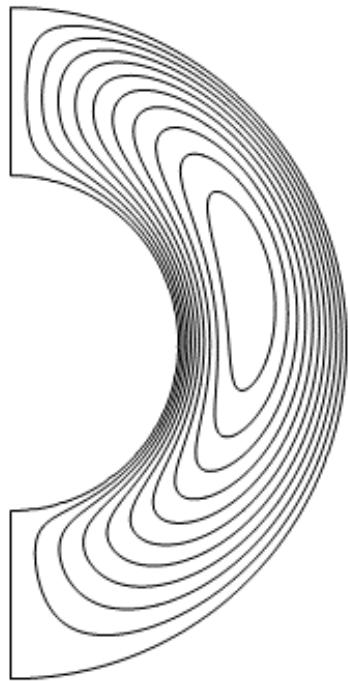


(c) Função corrente, solução bicelular.

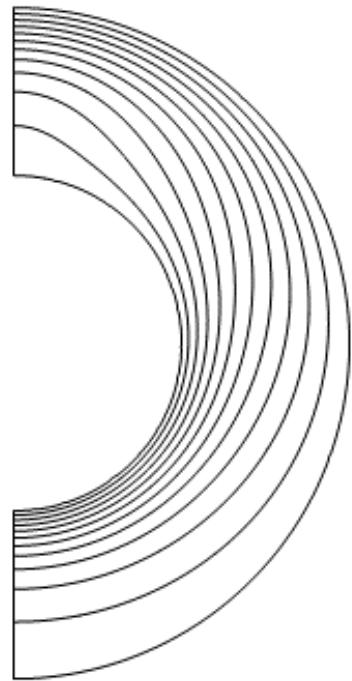


(d) Temperatura, solução bicelular.

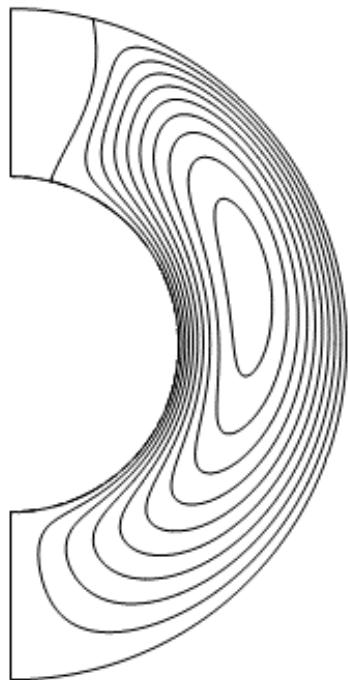
Figura 4.11: Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{2}$, $\eta = 2$, $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ e $Ra = 50$.



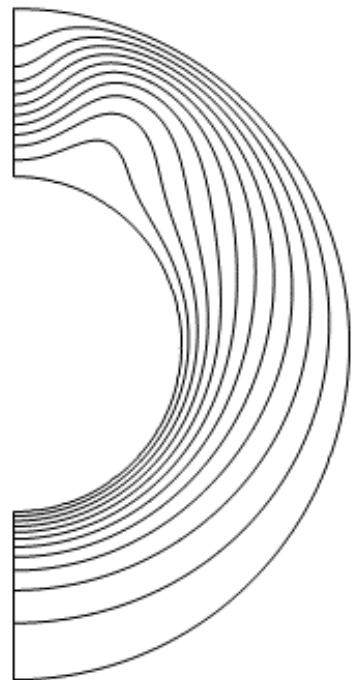
(a) Função corrente, solução unicelular.



(b) Temperatura, solução unicelular.



(c) Função corrente, solução bicelular.

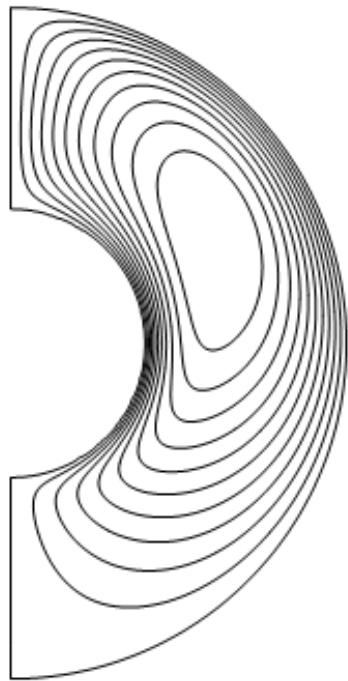


(d) Temperatura, solução bicelular.

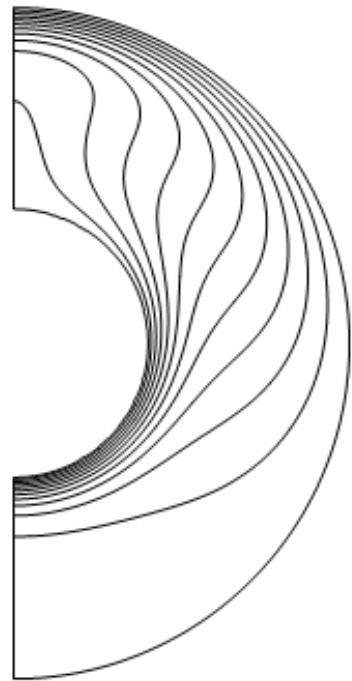
Figura 4.12: Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0$, $\eta = 2$, $\theta_f = \pi$ e $Ra = 50$.

A figura 4.13 mostra o fenômeno das soluções duplas observadas para temperatura e função corrente, quando o número de Rayleigh (Ra) é igual a 100, o raio adimensional externo (η) é igual a 2,5, e para o ângulo θ_1 valendo 0 e o ângulo θ_f valendo π . Na solução unicelular, o fluido se movimenta para cima próximo a parede interna aquecida e desce próximo a parede externa fria. Na solução bicelular, novamente a formação de um novo vórtice contra-rotativo ocorre na parte superior da geometria. Também é possível observar que com o aumento da cavidade e do número de Rayleigh uma perturbação mais significativa foi observada na distribuição da temperatura na parte superior, em comparação com as análises anteriores.

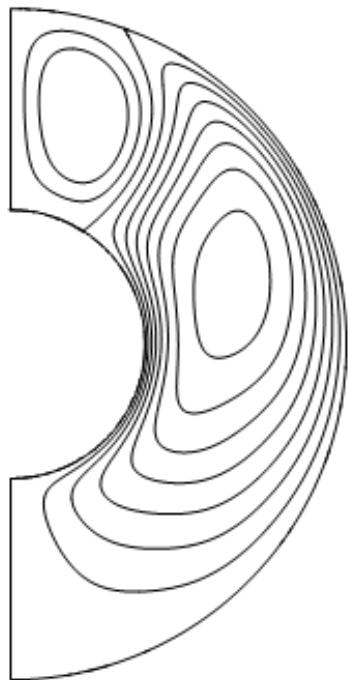
As figuras 4.14 e 4.15 mostram a curva de Nusselt médio nas paredes interna e externa versus o número de Rayleigh para cavidades com $\eta = 2$ e 2,5 respectivamente, bem como a presença de soluções duplas para determinados valores de Rayleigh. Pode-se observar que para a faixa do número de Rayleigh analisada, conforme o tamanho da cavidade aumenta, o Nusselt médio na parede interna diminui e o Nusselt médio na parede externa aumenta. Também pode-se perceber que para a cavidade com $\eta = 2,5$, as soluções duplas podem ser observadas a partir de números de Rayleigh inferiores em comparação com a cavidade com $\eta = 2$.



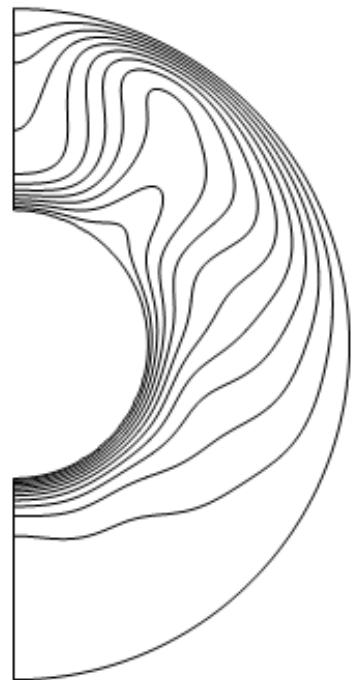
(a) Função corrente, solução unicelular.



(b) Temperatura, solução unicelular.



(c) Função corrente, solução bicelular.



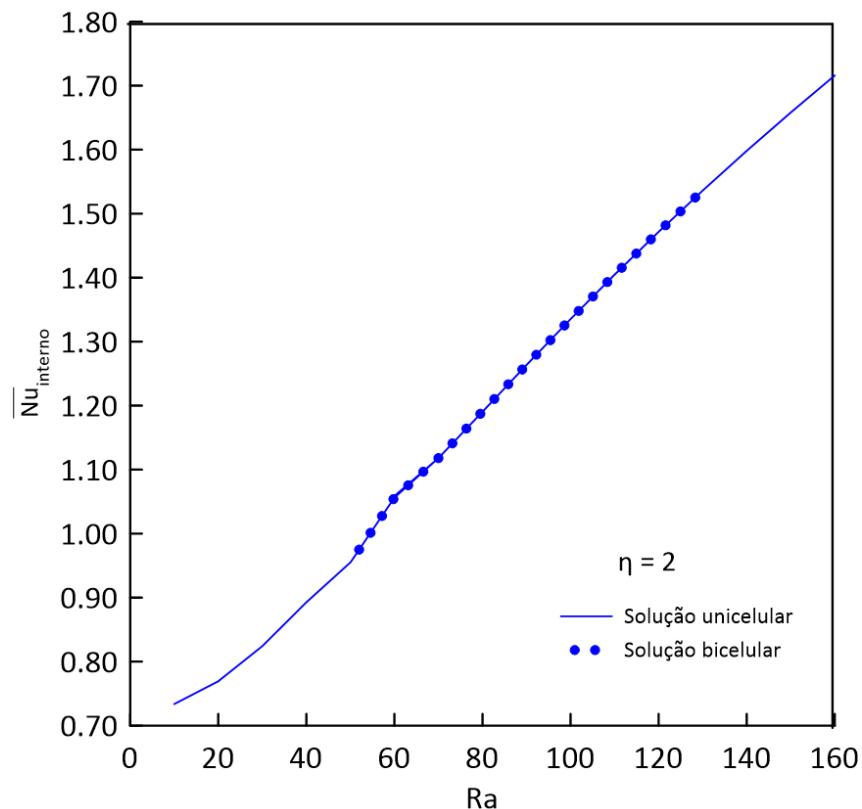
(d) Temperatura, solução bicelular.

Figura 4.13: Fenômeno das soluções duplas para $\theta_1 = 0$, $\eta = 2, 5$, $\theta_f = \pi$ e $Ra = 100$.

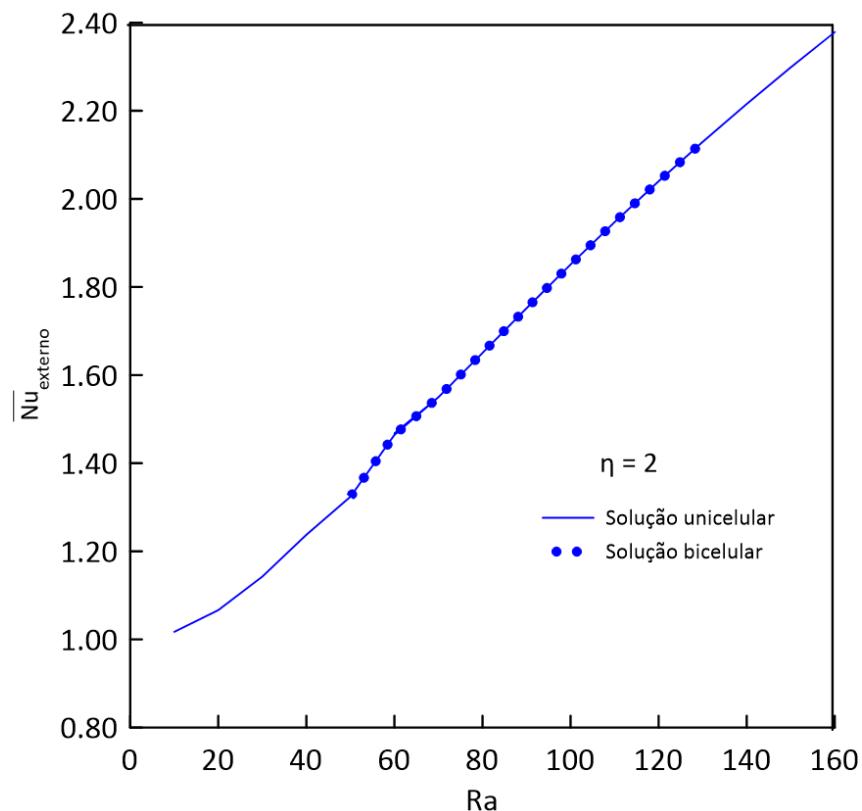
A figura 4.16 apresenta curvas de número médio de Nusselt em função do número de Rayleigh, fazendo uma comparação dos dados obtidos neste estudo com dados disponíveis na literatura, tanto experimentais como numéricos, para fins de validação. É possível observar que os dados obtidos no estudo estão de acordo com os dados existentes na literatura.

Inicialmente, a transferência de calor não se afasta significativamente do caso de condução pura, que ocorre quando o número de Nusselt é igual a um, mas conforme o número de Rayleigh aumenta, a intensidade da circulação do fluido também aumenta. O aumento repentino do Nusselt é principalmente uma consequência de uma mistura de fluido mais eficiente devido a formação de vórtices contra-rotativos adicionais que aparecem na parte superior da geometria.

Para esta geometria, sempre há movimento fluido, mesmo para números de Rayleigh muito pequenos, pois o regime de condução pura só pode existir se a componente horizontal do gradiente de temperatura for idêntica a zero em todo o domínio e se a componente vertical for inferior a um certo limite. Para valores de Rayleigh mais altos, os resultados experimentais estão localizados acima dos valores calculados, o que implica que há um aumento significativo na transferência de calor devido aos efeitos tridimensionais desenvolvidos ao longo do comprimento dos cilindros, que não são contabilizados neste estudo bidimensional.

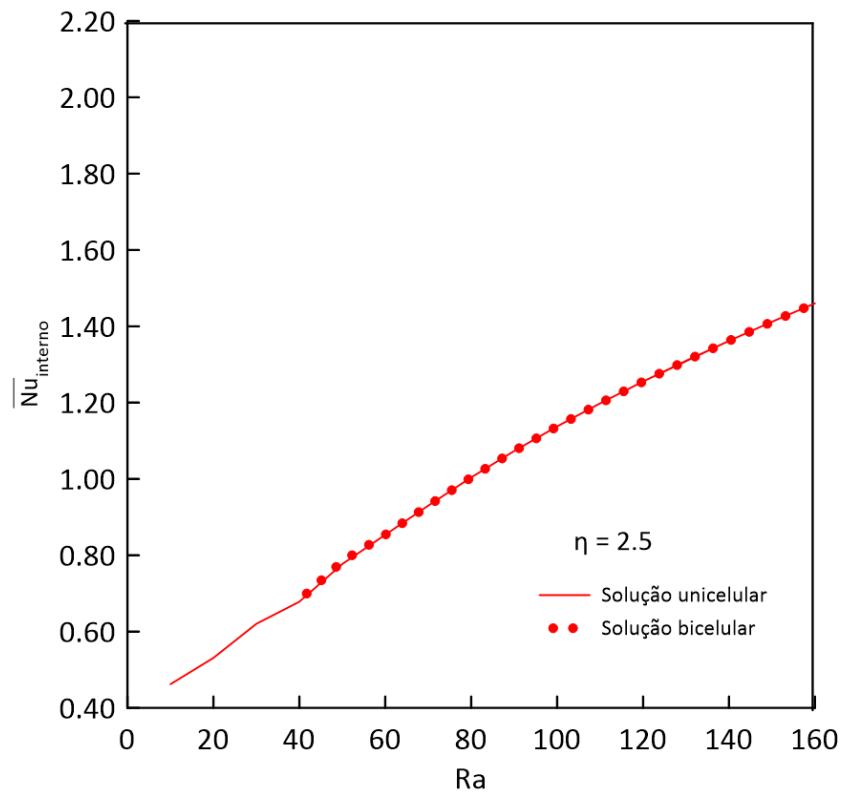


(a) Nusselt médio interno vs Ra.

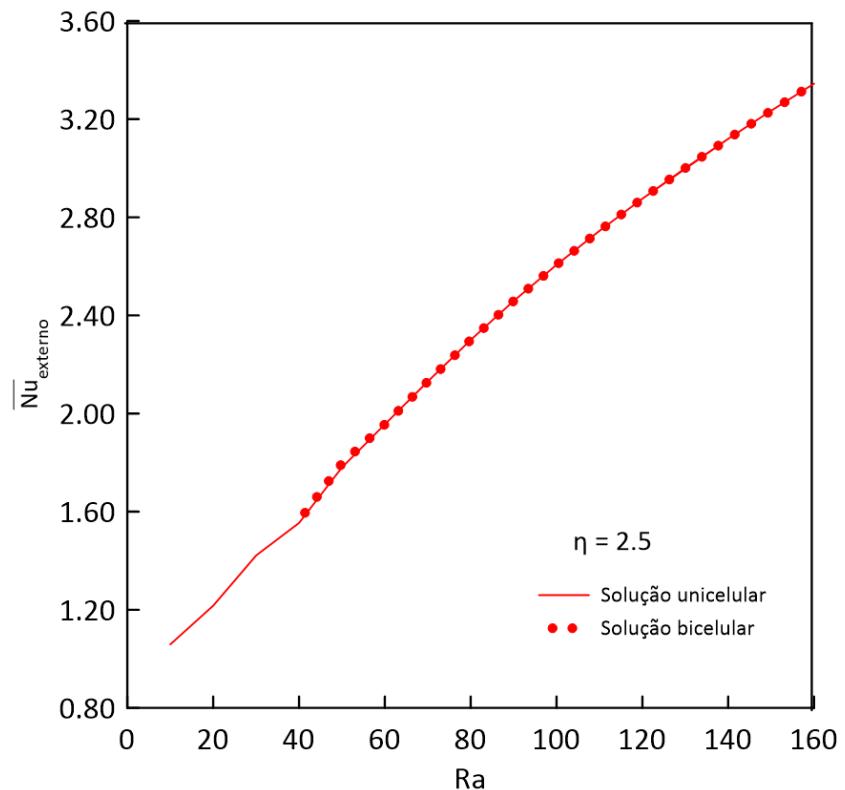


(b) Nusselt médio externo vs Ra.

Figura 4.14: Fenômeno das soluções duplas para $\eta = 2$, $\theta_1 = 0$ e $\theta_f = \pi$.



(a) Nusselt médio interno vs Ra.



(b) Nusselt médio externo vs Ra.

Figura 4.15: Fenômeno das soluções duplas para $\eta = 2.5$, $\theta_1 = 0$ e $\theta_f = \pi$.

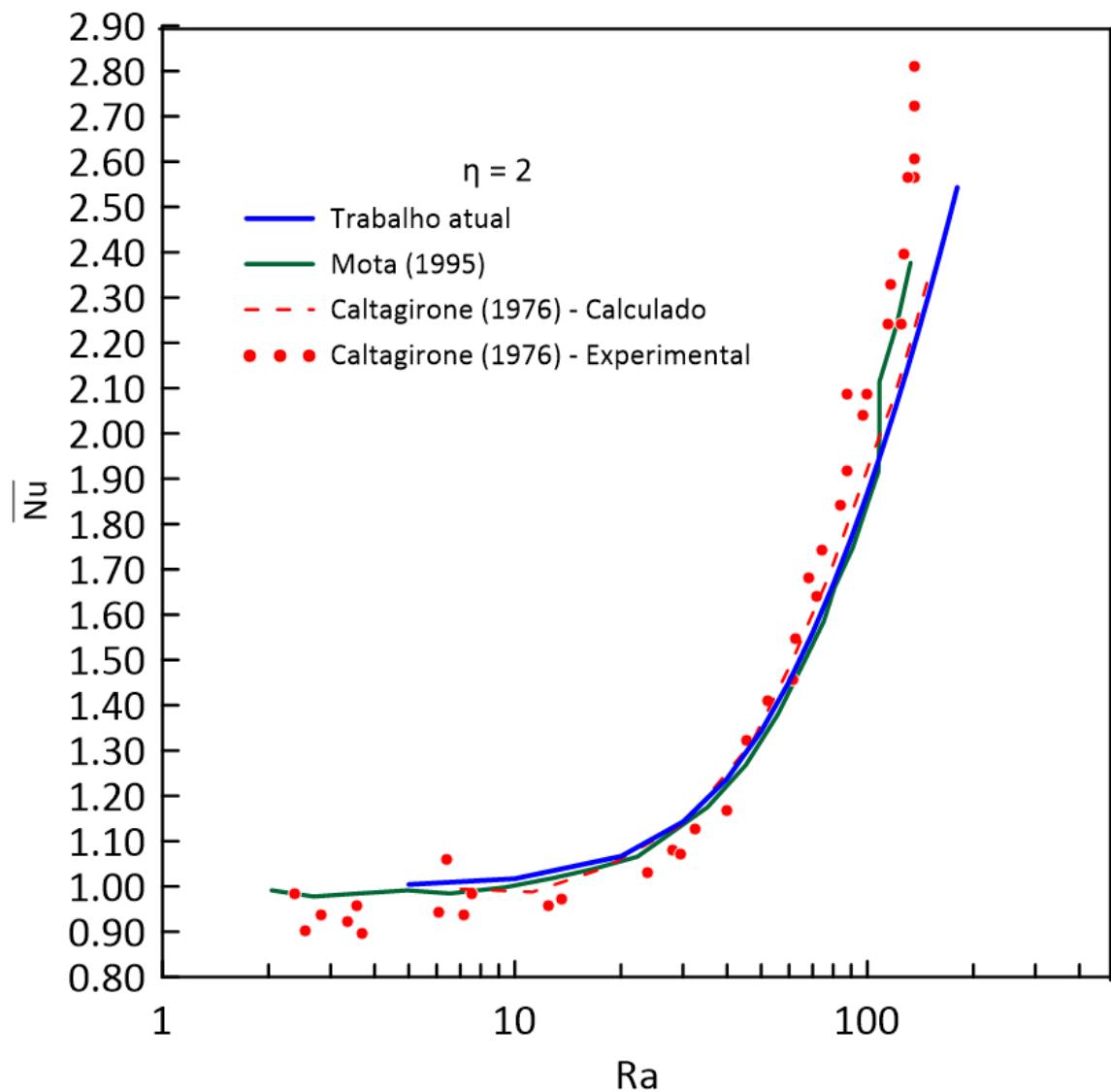


Figura 4.16: Comparaçāo do Nusselt mādio em função de Rayleigh com resultados da literatura ($\eta=2$).

4.2.3 Conclusões

Foi apresentado o desenvolvimento matemático e a análise de convergência da convecção natural em regime permanente em uma cavidade anular horizontal porosa bidimensional com aquecimento diferenciado pela parede interna. Novamente, a solução pela técnica da transformada integral generalizada mostrou ser uma poderosa abordagem numérica-analítica com boa convergência para resolver problemas de transferência de calor, com baixo custo computacional.

A convergência para quatro dígitos é prontamente obtida para a temperatura e função corrente quando a ordem de truncamento (N) é igual a 25. Para uma combinação específica de condições iniciais, foi observada a convergência de soluções duplas tanto para a temperatura quanto para a função corrente.

Interessante observar que a formação dos vórtices para o caso com aquecimento diferenciado é completamente diferente quando comparado ao caso anterior, com geração de calor interna. Soluções unicelulares e bicelulares foram apresentadas para diferentes tamanhos de setores anulares e cavidades. Os resultados obtidos foram comparados com dados disponíveis na literatura, mostrando excelente concordância.

4.3 Convecção natural em regime transiente com aquecimento volumétrico

Para o problema de convecção natural em regime transiente, que ocorre dentro de uma cavidade anular horizontal com geração interna de calor, foram gerados e apresentados diversos resultados numéricos e gráficos. Esses resultados abrangem diferentes aspectos, incluindo a distribuição da temperatura, a função corrente e o número de Nusselt, com base em uma série de valores variados para o número de Rayleigh, tamanho da cavidade, entre outros parâmetros. Essa abordagem detalhada permite uma compreensão mais aprofundada e abrangente das variáveis envolvidas e dos efeitos provocados pela variação de parâmetros sobre o comportamento térmico e o fluxo dentro da cavidade anular.

4.3.1 Análise de convergência

A convergência para a temperatura e para a função corrente é apresentada, respectivamente, nas tabelas 4.7 e 4.8. Esses resultados são especificamente para os parâmetros onde o número de Rayleigh (Ra) é 100, o raio externo adimensional (R) é 2, e o ângulo final (θ_f) é π . A ordem de truncamento para as expansões, denotada por N , varia de 10 a 25. Os valores de temperatura e função corrente são mostrados para diferentes localidades da geometria anular, com o raio (r) variando de 1,25 a 1,75 e o ângulo (θ) variando de 0 a π .

Na tabela 4.7 é possível observar que a temperatura convergiu para quatro dígitos significativos quando a ordem de truncamento das expansões foi igual a 15. De maneira semelhante, a tabela 4.8 apresenta a análise de convergência para a função corrente, demonstrando que a convergência também ocorre quando a ordem de truncamento é igual a 15.

Tabela 4.7: Convergência da temperatura.

θ	N	r = 1,25	r = 1,50	r = 1,75
0	10	0,0968	0,1217	0,0858
	15	0,0967	0,1218	0,0860
	20	0,0967	0,1218	0,0859
	25	0,0967	0,1218	0,0859
$\frac{\pi}{6}$	10	0,0972	0,1222	0,0862
	15	0,0972	0,1223	0,0864
	20	0,0972	0,1223	0,0863
	25	0,0972	0,1223	0,0864
$\frac{\pi}{4}$	10	0,0978	0,1228	0,0868
	15	0,0977	0,1229	0,0870
	20	0,0977	0,1229	0,0869
	25	0,0977	0,1229	0,0869
$\frac{\pi}{3}$	10	0,0986	0,1236	0,0875
	15	0,0985	0,1237	0,0877
	20	0,0985	0,1237	0,0877
	25	0,0985	0,1237	0,0877
$\frac{\pi}{2}$	10	0,1006	0,1257	0,0895
	15	0,1005	0,1258	0,0897
	20	0,1005	0,1258	0,0896
	25	0,1005	0,1258	0,0896
π	10	0,1052	0,1308	0,0941
	15	0,1051	0,1309	0,0943
	20	0,1051	0,1309	0,0942
	25	0,1051	0,1309	0,0942

Tabela 4.8: Convergência da função corrente.

θ	N	$r = 1,25$	$r = 1,50$	$r = 1,75$
$\frac{\pi}{6}$	10	0,1634	-0,0972	-0,2725
	15	0,1642	-0,0972	-0,2750
	20	0,1642	-0,0974	-0,2740
	25	0,1640	-0,0973	-0,2744
$\frac{\pi}{4}$	10	0,2308	-0,1386	-0,3870
	15	0,2318	-0,1387	-0,3906
	20	0,2319	-0,1389	-0,3891
	25	0,2316	-0,1389	-0,3897
$\frac{\pi}{3}$	10	0,2820	-0,1718	-0,4766
	15	0,2834	-0,1718	-0,4810
	20	0,2834	-0,1722	-0,4792
	25	0,2831	-0,1721	-0,4799
$\frac{\pi}{2}$	10	0,3240	-0,2043	-0,5582
	15	0,3255	-0,2044	-0,5634
	20	0,3255	-0,2048	-0,5612
	25	0,3252	-0,2047	-0,5621

Essas tabelas evidenciam a precisão dos cálculos realizados para os diferentes pontos da geometria anular estudada. Isso confirma que a escolha da ordem de truncamento é adequada para garantir a acurácia necessária nos resultados tanto para a temperatura quanto para a função corrente, assegurando a consistência dos dados apresentados.

4.3.2 Resultados

A tabela 4.9 apresenta uma comparação dos valores da temperatura máxima, da função corrente máxima e da função corrente mínima para setores anulares com ângulos variando de 0 a π , e para diferentes valores de raio externo adimensional e números de Rayleigh. Vale destacar que as temperaturas mínimas não foram incluídas, pois todos os valores obtidos foram iguais a zero. A partir da análise dos dados, pode-se observar que, à medida que o tamanho da cavidade aumenta, as temperaturas máximas obtidas também aumentam para um mesmo valor do número de Rayleigh. Por outro lado, quando se considera cavidades de tamanho igual e se varia o número de Rayleigh, o impacto nas temperaturas é significativamente menor em comparação com o impacto observado na função corrente, tanto nos valores máximos quanto nos valores mínimos.

Isso indica que a função corrente é mais sensível às variações no número de Rayleigh em relação à temperatura, refletindo um comportamento mais acentuado nas mudanças da função corrente.

Tabela 4.9: Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com diferentes tamanhos e números de Rayleigh.

Ra	$R = 2$	$R = 3$	$R = 4$
T_{max}			
100	0,131282	0,533709	0,829039
500	0,150438	0,549660	0,890764
1000	0,165099	0,424602	0,684053
2000	0,157784	0,333075	0,546991
ψ_{max}			
100	0,37768	1,86761	3,53493
500	1,82500	7,34774	13,34220
1000	3,40673	11,63920	20,07330
2000	5,94957	17,11660	28,42240
ψ_{min}			
100	-0,56361	-3,40509	-7,03596
500	-2,73269	-13,66900	-25,23700
1000	-5,21307	-20,68420	-35,38880
2000	-9,36098	-29,41880	-47,70700

A tabela 4.10 apresenta uma comparação dos valores da temperatura máxima, da função corrente máxima e da função corrente mínima para setores anulares com um raio adimensional externo igual a 2. Esta comparação é feita para diferentes instantes de tempo, que variam de 0,001 a 1, e para diferentes valores do número de Rayleigh, que variam de 100 a 2000. A partir dos dados apresentados, é possível observar que os valores da temperatura e da função corrente tendem a aumentar em termos absolutos com o passar do tempo.

Além disso, o comportamento observado é consistente com o que foi notado na tabela anterior: o impacto do aumento do número de Rayleigh é mais pronunciado na função corrente do que na temperatura.

Ou seja, essa tendência indica que, enquanto ambos os parâmetros aumentam com o tempo, a função corrente é mais sensível às variações no número de Rayleigh do que a temperatura.

Tabela 4.10: Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com $R = 2$, $\chi = 1$, para diferentes instantes e números de Rayleigh.

Ra	$t = 0,001$	$t = 0,01$	$t = 0,1$	$t = 1$
T_{max}				
100	0,00024	0,00236	0,02253	0,13128
500	0,00027	0,00265	0,02529	0,15044
1000	0,00031	0,00308	0,02931	0,16509
2000	0,00030	0,00303	0,02873	0,15778
ψ_{max}				
100	0,00052	0,00519	0,05004	0,37768
500	0,00266	0,02649	0,25645	1,82500
1000	0,00525	0,05235	0,50448	3,40673
2000	0,00969	0,09655	0,92643	5,94957
ψ_{min}				
100	-0,00077	-0,00771	-0,07496	-0,56360
500	-0,00389	-0,03881	-0,37630	-2,73269
1000	-0,00774	-0,07716	-0,74563	-5,21307
2000	-0,01469	-0,14636	-1,40837	-9,36098

A tabela 4.11 apresenta uma comparação dos valores da temperatura máxima, da função corrente máxima e da função corrente mínima para setores anulares com um raio adimensional externo igual a 2, número de Rayleigh igual a 100 para diferentes valores do parâmetro χ , variando de 0,0001 a 100, em diferentes instantes de tempo, que variam de 0,001 a 1. A partir dos dados apresentados, é possível observar que os valores da temperatura e da função corrente tendem a aumentar em termos absolutos com o passar do tempo e do parâmetro χ .

Tabela 4.11: Comparação dos valores da temperatura máxima, função corrente máxima e mínima para setores anulares com $R = 2$, $Ra = 100$, para diferentes instantes e valores de χ .

χ	t	T_{max}	ψ_{max}	ψ_{min}
0,0001	0,001	0,000232	0,000000	0,000000
	0,01	0,002309	0,000001	-0,000001
	0,1	0,021974	0,000005	-0,000008
	1	0,126654	0,000057	-0,000085
0,001	0,001	0,000232	0,000001	-0,000001
	0,01	0,002309	0,000005	-0,000008
	0,1	0,021974	0,000052	-0,000078
	1	0,126660	0,000574	-0,000854
0,01	0,001	0,000232	0,000005	-0,000008
	0,01	0,002310	0,000052	-0,000077
	0,1	0,021979	0,000524	-0,000776
	1	0,126719	0,005719	-0,008509
0,1	0,001	0,000233	0,000052	-0,000077
	0,01	0,002314	0,000523	-0,000774
	0,1	0,022026	0,005265	-0,007795
	1	0,127286	0,054925	-0,081740
1	0,001	0,000238	0,000520	-0,000773
	0,01	0,002366	0,005187	-0,007706
	0,1	0,022533	0,050444	-0,074964
	1	0,131282	0,377678	-0,563605
10	0,001	0,000248	0,001159	-0,001749
	0,01	0,002471	0,011528	-0,017406
	0,1	0,023516	0,109696	-0,165628
	1	0,135569	0,632256	-0,954809
100	0,001	0,000248	0,001158	-0,001750
	0,01	0,002472	0,011528	-0,017414
	0,1	0,023525	0,109693	-0,165703
	1	0,135599	0,632244	-0,955078

As figuras 4.17 e 4.18 mostram, respectivamente, a distribuição radial da temperatura e da função corrente ao longo da linha central ($\theta = \frac{\pi}{2}$) de uma cavidade anular horizontal. Estas figuras ilustram a variação desses parâmetros para diferentes instantes de tempo (t), que vão de 0,001 a 1. As análises são feitas considerando um número de Rayleigh igual a 100, um raio interno adimensional (r_i) de 1 e um raio externo adimensional (r_o) de 2, além de ângulos variando de 0 a π .

Essas representações visuais permitem observar como a temperatura e a função corrente se distribuem radialmente na cavidade ao longo do tempo, oferecendo uma visão mais detalhada do comportamento do sistema em diferentes condições temporais e geométricas.

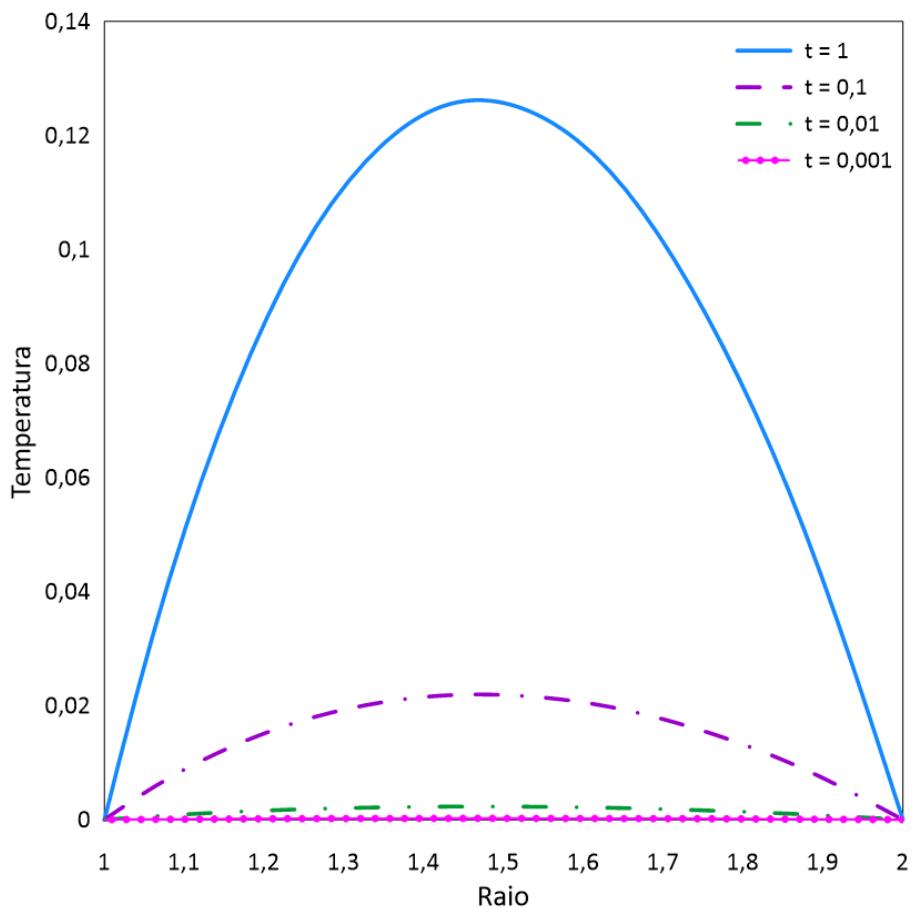


Figura 4.17: Distribuição radial de temperatura em diferentes instantes para $\text{Ra}=100$, $R = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

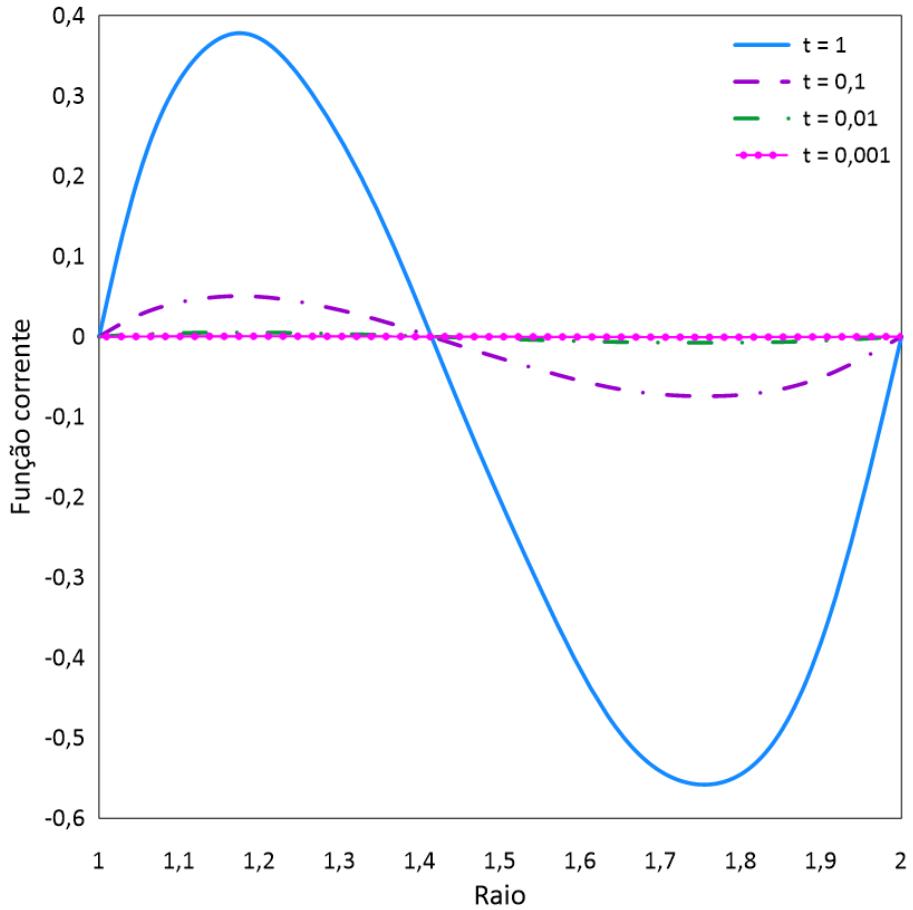
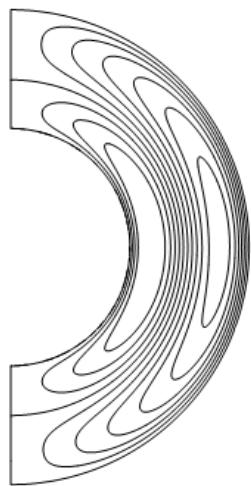


Figura 4.18: Distribuição radial de função corrente em diferentes instantes para $\text{Ra}=100$, $R = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

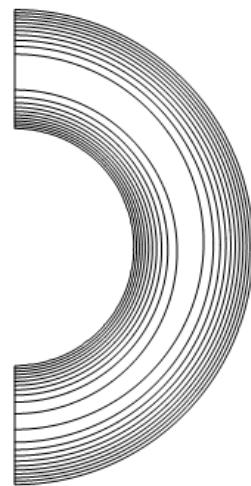
A figura 4.19 apresenta gráficos de contorno para função corrente e temperatura para diferentes números de Rayleigh. Para valores pequenos do número de Rayleigh, a transferência de calor é principalmente governada pela condução, resultando em isotermas que se assemelham a círculos concêntricos, com um perfil de temperatura quase parabólico ao longo do anel e as velocidades são muito pequenas para afetar a distribuição de temperatura.

Nesse cenário, o fluxo resultante consiste em dois vórtices em contrarrotação em cada metade da cavidade, onde o fluido é impulsionado para cima na região central e desce ao longo das paredes interna e externa. A presença desses dois vórtices em cada metade da cavidade é essencialmente atribuída à geometria e às condições de contorno consideradas.

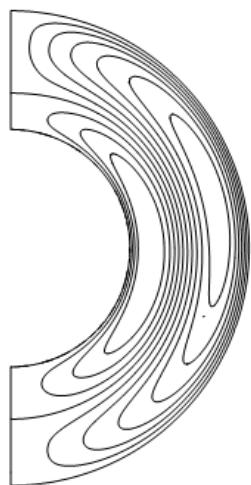
À medida que o número de Rayleigh aumenta, a distribuição de temperatura se torna distorcida, resultando em um aumento na transferência de calor total e vórtice externo passa a dominar o campo de fluxo, com o centro de rotação movendo-se para a parte superior da cavidade.



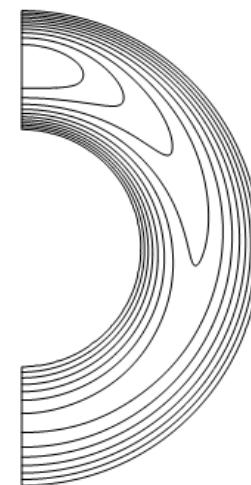
(a) Função corrente, $Ra = 100$



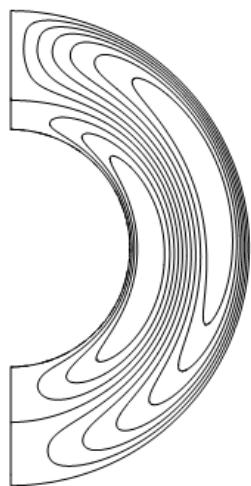
(b) Temperatura, $Ra = 100$



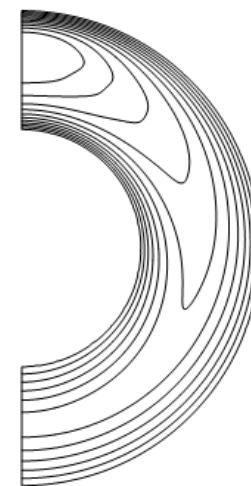
(c) Função corrente, $Ra = 1000$



(d) Temperatura, $Ra = 1000$



(e) Função corrente, $Ra = 2000$

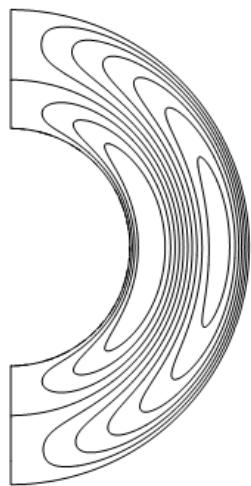


(f) Temperatura, $Ra = 2000$

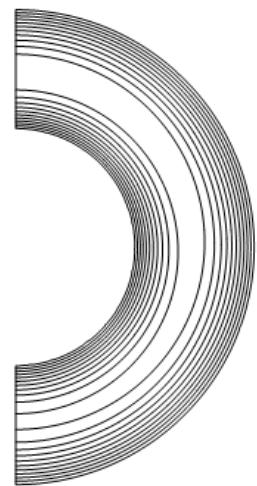
Figura 4.19: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($R = 2$, $t = 1$, $\chi = 1$).

A figura 4.20 apresenta gráficos de contorno para função corrente e temperatura para diferentes valores razão de raios, ou seja, diferentes tamanhos para a cavidade anular, considerando o valor do número de Rayleigh igual a 100, no instante t igual a 1. O espaço formado entre o centro da cavidade e o raio interno torna-se progressivamente menos relevante à medida que a razão entre os raios se amplifica. De acordo com os resultados, a contribuição da convecção natural para a transferência de calor aumenta à medida que a razão de raios cresce. A formação de dois vórtices contrarrotativos também é observada para todos os tamanhos da cavidade analisados, sendo que com o aumento da cavidade, é possível observar que o vórtice externo tende a dominar o campo de fluxo.

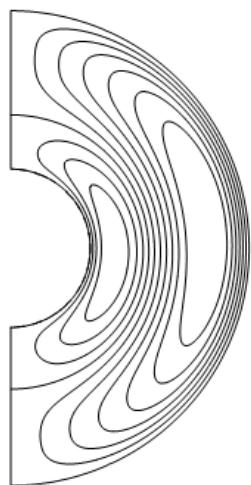
A figura 4.21 apresenta gráficos de contorno para função corrente e temperatura para cavidades anulares com razão de raios igual a 2, no instante t igual a 1 e com número de Rayleigh igual a 100 e diferentes valores do parâmetro χ . Como visto anteriormente, conforme o valor de χ aumenta os valores máximos de temperatura e função corrente e o valor mínimos de função corrente aumentam.



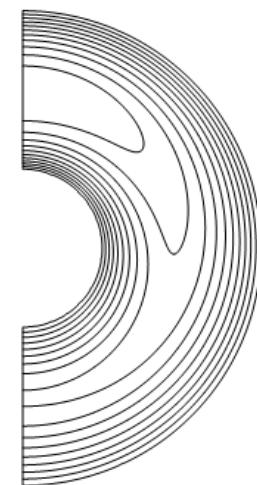
(a) Função corrente, $R = 2$



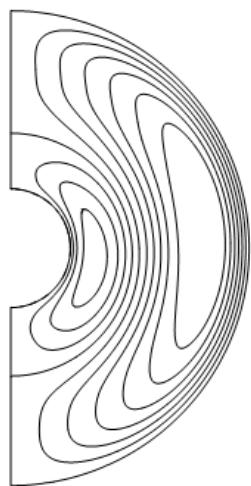
(b) Temperatura, $R = 2$



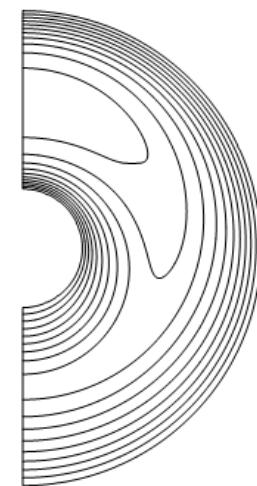
(c) Função corrente, $R = 3$



(d) Temperatura, $R = 3$

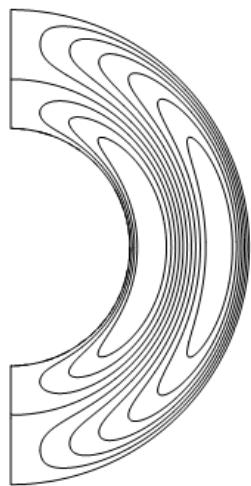


(e) Função corrente, $R = 4$

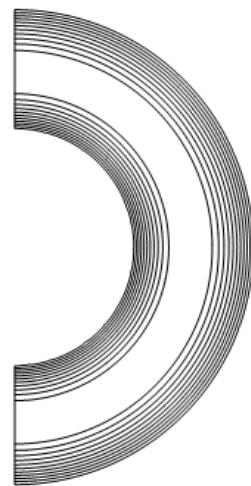


(f) Temperatura, $R = 4$

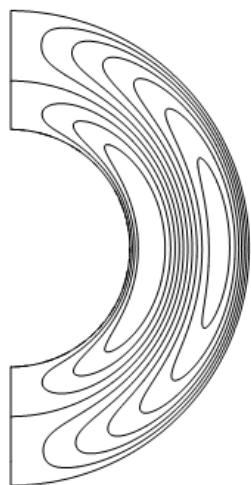
Figura 4.20: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($Ra = 100$, $t = 1$, $\chi = 1$).



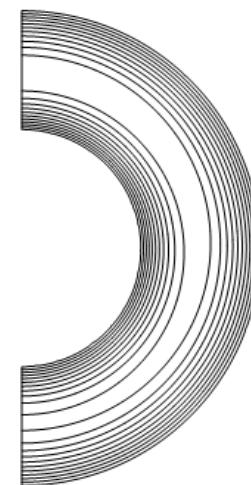
(a) Função corrente, $\chi = 0,0001$



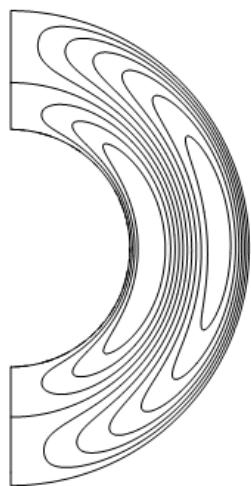
(b) Temperatura, $\chi = 0,0001$



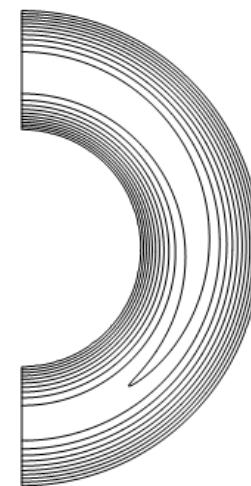
(c) Função corrente, $\chi = 1$



(d) Temperatura, $\chi = 1$



(e) Função corrente, $\chi = 10000$

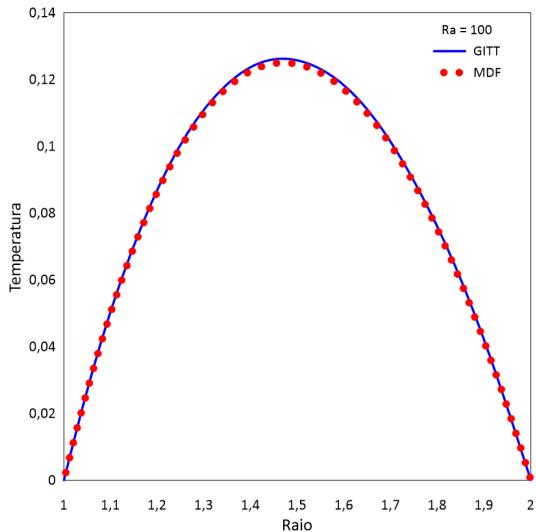


(f) Temperatura, $\chi = 10000$

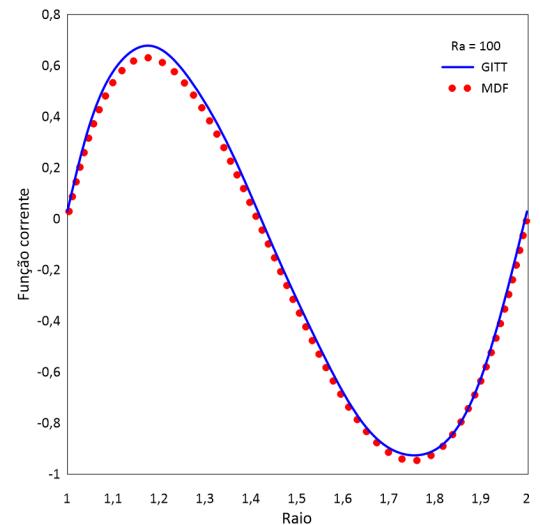
Figura 4.21: Gráficos de contorno para um setor anular horizontal com aquecimento volumétrico interno ($Ra = 100$, $t = 1$, $R = 2$).

A figura 4.22 mostra uma comparação das soluções obtidas através da Técnica da Transformada Integral Generalizada e o Método das Diferenças Finitas. Os perfis de temperatura, função corrente, velocidade radial e velocidade angular ao longo da linha central da cavidade ($\theta = \frac{\pi}{2}$) foram analisados considerando raio adimensional interno (r_i) igual a 1, raio adimensional externo (r_o) igual a 2, ordem de truncamento (N) igual a 15 e número de Rayleigh igual a 100. É notável que ambas as soluções possuem boa correlação.

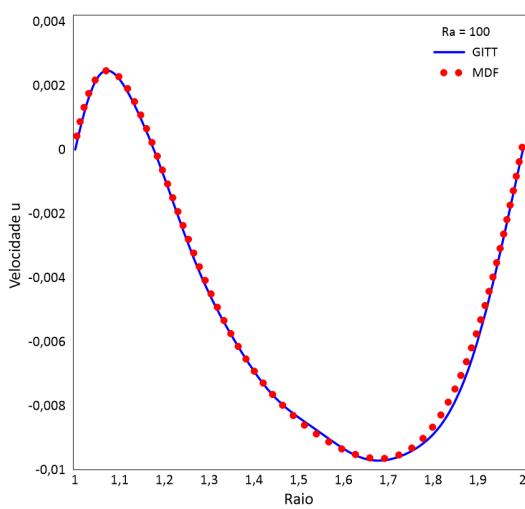
A figura 4.23 apresenta uma comparação dos números de Nusselt médios interno e externo, respectivamente, para diferentes números de Rayleigh variando de 100 a 2000 no tempo. Pode-se perceber que o número de Nusselt aumenta com o aumento do número de Rayleigh devido ao aumento da velocidade do fluido.



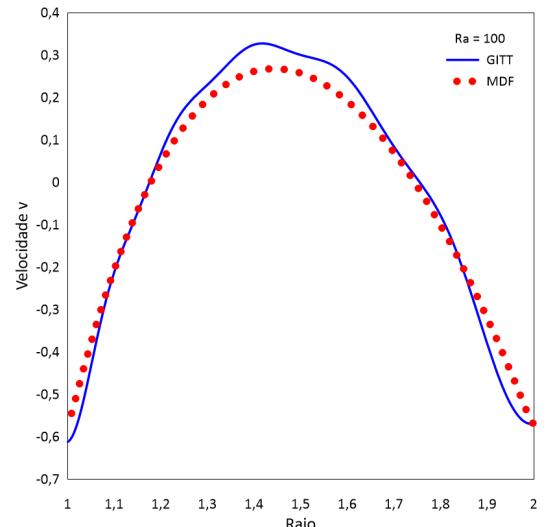
(a) Perfil de temperatura em $\theta = \frac{\pi}{2}$.



(b) Perfil de função corrente em $\theta = \frac{\pi}{2}$.

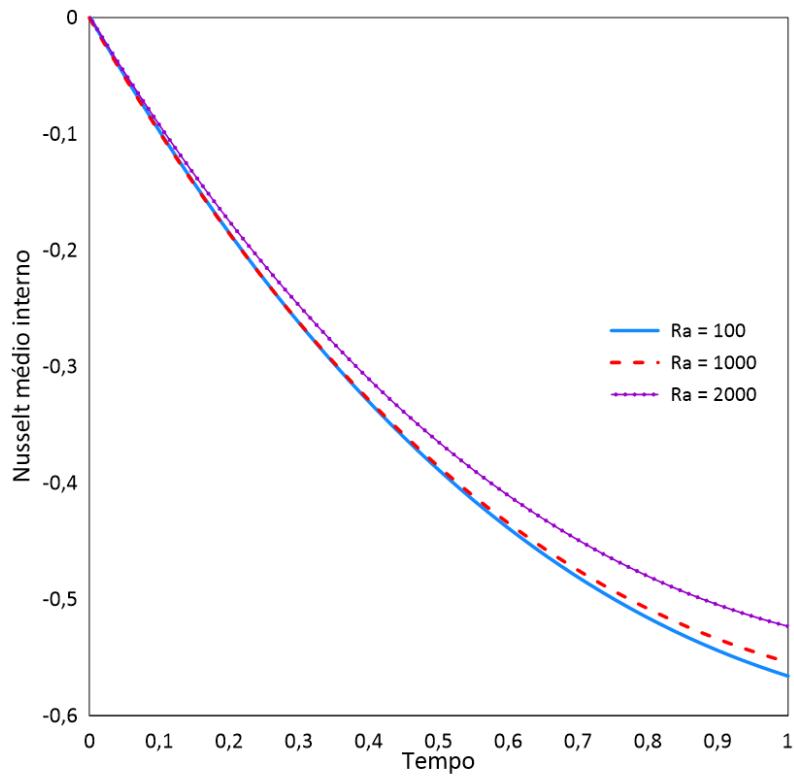


(c) Perfil de velocidade radial em $\theta = \frac{\pi}{2}$.

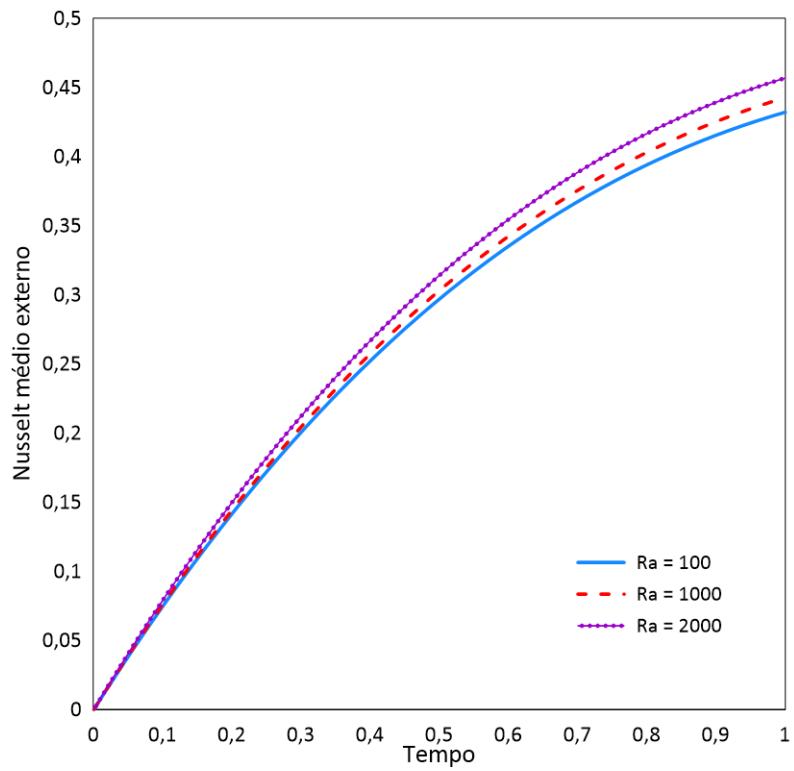


(d) Perfil de velocidade angular em $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Figura 4.22: Comparação da solução por GITT com FDM para $\theta = \pi/2$, $R = 2$, $\theta_f = \pi$, $Ra = 100$.



(a) Nusselt médio interno vs tempo.



(b) Nusselt médio externo vs tempo.

Figura 4.23: Comparação dos números de Nusselt médios interno e externo para $R = 2$, $\theta_i = 0$ e $\theta_f = \pi$ e diferentes números de Rayleigh.

4.3.3 Conclusões

Foram apresentados o desenvolvimento matemático e a análise de convergência da convecção natural em regime transitório, em uma cavidade anular bidimensional horizontal preenchida com meio poroso e com geração interna uniforme de calor. Neste contexto, a Técnica da Transformada Integral Generalizada também demonstrou ser altamente adequada e eficiente para a resolução do problema, destacando-se pela sua capacidade de lidar com a complexidade do problema transitório.

O problema transitório exige um poder computacional significativamente maior em comparação com problemas anteriores, devido ao fato de que ambas as coordenadas espaciais precisam ser transformadas, o que adiciona complexidade ao processo, uma vez que essas coordenadas são interdependentes. Para simplificar os cálculos e eliminar essa interdependência, foi utilizada uma transformação log-polar auxiliar. É relevante destacar que, até o momento, não foram encontrados registros na literatura científica que documentem o uso anterior dessa transformação auxiliar para a solução de problemas semelhantes. A introdução da transformação log-polar foi eficaz em eliminar a necessidade de calcular funções de Bessel associadas às auto-funções e aos autovalores normalizados, o que contribuiu para um aumento significativo na eficiência do cálculo. Embora a inclusão desse novo termo tenha causado um pequeno aumento no tempo de processamento da simulação, a eficiência geral do cálculo foi mantida, assegurando que a técnica continuasse a ser eficaz na resolução do problema.

Capítulo 5

Considerações finais e trabalhos futuros

Neste capítulo, serão apresentadas as considerações finais referentes ao trabalho desenvolvido, com uma síntese dos principais achados e conclusões obtidas. Também serão fornecidas sugestões e recomendações para pesquisas futuras, com o objetivo de orientar e estimular novas investigações que possam ampliar ou aprofundar o conhecimento sobre o tema abordado.

Diversas pesquisas já foram realizadas e continuam a ser conduzidas no campo da convecção natural em cavidades. Esses estudos exploram uma ampla gama de cenários, incluindo tanto o aquecimento diferencial quanto a convecção impulsionada por geração interna de calor. É importante notar que há uma quantidade significativamente maior de investigações focadas no aquecimento diferencial em comparação com a geração de calor interna. Os estudos abrangem diferentes configurações, tais como cavidades preenchidas com meio poroso e aquelas que não contêm tal preenchimento. Além disso, há uma quantidade substancial de pesquisa em andamento que visa analisar detalhadamente os diversos fatores que afetam a convecção natural.

Essas investigações abrangem uma variedade de regimes de fluxo, desde os laminares até os turbulentos, com o objetivo de entender como cada variável influencia o comportamento da convecção sob diferentes condições.

Nesse contexto, foi escolhida a Técnica de Transformada Integral Generalizada, um método híbrido que combina abordagens analíticas e numéricas. Este método é amplamente reconhecido e comprovadamente eficaz na resolução de uma ampla gama de problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Ao longo das últimas décadas, a Técnica de Transformada Integral Generalizada tem se mostrado particularmente eficiente na solução de problemas relacionados à convecção e difusão, demonstrando sua robustez e versatilidade na análise de fenômenos complexos.

5.1 Considerações finais

O presente trabalho apresentou uma extensa revisão bibliográfica sobre problemas de convecção natural, com ênfase especial em meios porosos. Foi dada maior atenção à técnica da Transformada Integral Generalizada, além de um estudo detalhado sobre convecção natural em regime estacionário aplicado a dois problemas físicos distintos: um envolvendo geração interna de calor e outro com aquecimento diferenciado. Além disso, foi investigado um terceiro problema, considerando o regime transiente, especificamente para o caso com geração interna de calor. Esse conjunto de análises visa fornecer uma compreensão abrangente dos fenômenos envolvidos e das metodologias aplicáveis a esses tipos de problemas.

No primeiro caso, um setor anular horizontal preenchido por meio poroso com geração interna uniforme de calor foi estudado. Os resultados numéricos mostraram excelente convergência para a temperatura e função corrente com um custo

computacional relativamente baixo. As soluções via transformada integral foram co-validadas com os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas, e mostraram que o método é eficiente e preciso para a resolução deste problema. O método proposto também é validado em comparação com um caso da literatura apresentando excelente concordância para o campo de temperatura. Observou-se que os efeitos do aumento do número Rayleigh são mais perceptíveis na função corrente e, consequentemente, nas velocidades radial e angular, mas são menos significativos para a temperatura. Com a redução do ângulo final de π para $\frac{\pi}{4}$, foi possível observar uma redução no valor da temperatura máxima e na função corrente. Embora a presença de dois vórtices em contra-rotação seja comum para todos os ângulos do setor anular investigados, o tamanho relativo dos dois vórtices varia com a diminuição do ângulo do setor, com o vórtice próximo ao raio externo da cavidade se tornando dominante. O ângulo do setor anular afeta fortemente a temperatura máxima e a partição da transferência de calor nas superfícies interna e externa do setor anular com meio poroso gerador de calor.

No segundo caso, foi realizado um estudo aprofundado do desenvolvimento matemático e da análise de convergência da convecção natural em regime permanente em uma cavidade anular horizontal bidimensional preenchida com um meio poroso, sendo aquecida pela parede interna. A Técnica de Transformada Integral Generalizada revelou-se, mais uma vez, uma abordagem híbrida extremamente eficaz, que combina métodos numéricos e analíticos para resolver problemas complexos de transferência de calor com um custo computacional reduzido. Com o uso da GITT, foi possível alcançar uma convergência precisa para quatro dígitos significativos, tanto para a distribuição de temperatura quanto para a função corrente, quando a ordem de truncamento (N) foi definida em 25. Além disso, em uma combinação específica de condições iniciais, foram identificadas soluções duplas tanto para a

função corrente quanto para a distribuição de temperatura. Esses resultados destacam a complexidade e a riqueza do comportamento térmico analisado, evidenciando a importância e a eficácia da técnica utilizada.

No terceiro caso, foram obtidos resultados para o regime transiente, considerando uma cavidade anular horizontal preenchida com meio poroso e com geração interna uniforme de calor. A análise do problema em regime transiente implica um custo computacional mais elevado, uma vez que a transformada deve ser aplicada tanto na direção azimutal quanto na radial, resultando na necessidade de transformar ambas as coordenadas e acrescentar somatórios na formulação inversa. A equação resultante, que depende do tempo, foi resolvida utilizando o método das diferenças finitas. Para simplificar o problema, uma transformação log-polar foi introduzida, com o objetivo de separar as coordenadas r e θ , eliminando a necessidade das funções de Bessel na solução. No entanto, esse processo implicou a adição de uma matriz na equação de energia. Apesar dessa complexidade adicional, a Técnica de Transformada Integral Generalizada demonstrou ser um método capaz e eficaz para resolver o problema da convecção natural também neste caso, novamente provando sua versatilidade e robustez.

Em todos os casos estudados, a plataforma Mathematica demonstrou ser uma ferramenta poderosa para computação simbólica-numérica mista, sendo perfeitamente adequada para metodologias de solução híbridas numérico-analíticas, como a Técnica de Transformada Integral Generalizada. Além disso, seus recursos gráficos avançados permitem uma visualização rápida e eficiente dos resultados, tornando-se um recurso indispensável para a pesquisa científica. A combinação de cálculos simbólicos e numéricos com capacidades gráficas robustas contribui significativamente para a eficiência e a clareza das investigações científicas.

5.2 Trabalhos futuros

Algumas das possíveis complementações para este trabalho são:

- A realização de um estudo envolvendo a utilização de diferentes modelos para analisar a convecção natural em cavidades preenchidas com meio poroso, como o modelo de Brinkman-Darcy, o modelo de Brinkman-Forchheimer-Darcy, entre outros, pode fornecer uma visão mais abrangente e detalhada dos fenômenos envolvidos. Estes modelos variam em termos de complexidade e precisão, oferecendo diferentes perspectivas sobre a interação entre o fluxo de fluido e o meio poroso. A comparação entre esses modelos pode enriquecer a compreensão do comportamento térmico e hidráulico em cavidades porosas, possibilitando a identificação das condições que mais influenciam o desempenho do sistema de transferência de calor.
- A implementação do procedimento adaptativo de controle de ordem é altamente recomendada, pois atua como um redutor automático do número de termos necessários nas ordens de truncamento das expansões em cada etapa do processo de integração no tempo. No entanto, este procedimento não foi implementado devido às dificuldades encontradas no reordenamento dos campos transformados, uma questão que ainda requer investigação adicional. Esta dificuldade está intimamente ligada à seleção de filtros adequados. A pesquisa futura deve focar no desenvolvimento de métodos eficazes para o reordenamento e na otimização dos filtros. A superação desses desafios pode levar a avanços significativos na eficiência e precisão dos modelos utilizados.

Referências Bibliográficas

- [1] WANG, M., ZHAO, H., ZHANG, Y., et al. “Research on the designed emergency passive residual heat removal system during the station blackout scenario for CPR1000”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 45, pp. 86 – 93, 2012.
- [2] TEIXEIRA E SILVA, A., NETO, M. M., SILVA, M. C. C. D. “Análise de opções para o armazenamento temporário de combustíveis queimados do reator IEA-R1 do IPEN-CNEN/SP”. In: *International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, Online, 2005.
- [3] ROMANATO, L. S. *Armazenagem de combustível nuclear 'queimado'*. Dissertação de mestrado, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2005.
- [4] ALIATKA, A., GNERUBOV, V., VILEINISKIS, V. “Analysis of the processes in spent fuel pools of Ignalina NPP in case of loss of heat removal”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 240, n. 5, pp. 1073 – 1082, 2010.
- [5] HUNG, T.-C., DHIR, V., PEI, B.-S., et al. “The development of a three-dimensional transient CFD model for predicting cooling ability of spent fuel pools”, *Applied Thermal Engineering*, v. 50, pp. 496–504, 01 2013.
- [6] MIKHAILOV, M. D., OZISIK, M. N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. John Wiley Sons, 1984.
- [7] DU, Z. G., BILGEN, E. “Natural convection in vertical cavities with partially filled heat-generating porous media”, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, v. 18, n. 3, pp. 371–386, 1990.
- [8] FUSEGI, T., HYUN, J. M., KUWAHARA, K. “Natural convection in a differentially heated square cavity with internal heat generation”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 21, n. 2, pp. 215–229, 1992.
- [9] JOSHI, M. V., GAITONDE, U. N., MITRA, S. K. “Analytical study of natural convection in a cavity with volumetric heat generation”, *Journal of Heat Transfer*, v. 128, n. 2, pp. 176–182, 2006.

- [10] POP, I., INGHAM, D. B., CHENG, P. “Transient free convection between two concentric spheres filled with a porous medium”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 7, pp. 724–727, 1993. ISSN: 15336808. doi: 10.2514/3.483.
- [11] POP, I., INGHAM, D. B., CHENG, P. “Transient natural convection in a horizontal concentric annulus filled with a porous medium”, *Journal of Heat Transfer*, v. 114, pp. 990–997, 1992.
- [12] ARPINO, F., CAROTENUTO, A., CICCOLELLA, M., et al. “Transient natural convection in partially porous vertical annuli”, *International Journal of Heat and Technology*, v. 34, pp. S512–S518, 2016.
- [13] ARPINO, F., CICCOLELLA, M., CORTELLESSA, G., et al. “Influence of one porous layer insert on the transient heat transfer in a tall annulus in presence of large source terms”, *International Journal of Heat and Technology*, v. 35, pp. S478–S484, 2017.
- [14] KHALEED, H. M., PALLAN, K. M., MULLA, M. F. “Heat transfer in porous annulus: Effect of aspect ratio”. In: *AIP Conference Proceedings*, v. 1953. American Institute of Physics Inc., 5 2018.
- [15] SHEKAR, B. C., VASSEUR, P., ROBILLARD, L., et al. “Natural convection in a heat generating fluid bounded by two horizontal concentric cylinders”, *The Canadian Journal Of Chemical Engineering*, v. 62, n. 4, pp. 482–489, 1984.
- [16] HOLZBECHER, M., STEIFF, A. “Laminar and turbulent free convection in vertical cylinders with internal heat generation”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 15, pp. 2893 – 2903, 1995.
- [17] CHO, C. H., CHANG, K. S., PARK, K. H. “Numerical simulation of natural convection in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli”, *Journal of Heat Transfer*, v. 104, n. 4, pp. 624–630, 1982.
- [18] MOUKALLED, F., ACHARYA, S. “Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 10, n. 3, pp. 524–531, 1996.
- [19] BELABID, J. “Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption”, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, v. 94, pp. 934–941, 2021.

- [20] MARTIN, B. W. “Free convection in a vertical cylinder with internal heat generation”, *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, v. 301, n. 4, pp. 327–341, 1967.
- [21] WOLFF F., BECKERMAN C., V. R. “Natural convection of liquid metals in vertical cavities”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 1, n. 1, pp. 83–91, 1988.
- [22] SHIM, Y. M., HYUN, J. M. “Transient confined natural convection with internal heat generation”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 18, n. 3, pp. 328–333, 1997.
- [23] LEE, J., GOLDSTEIN, R. “An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources”, *Journal of Heat Transfer*, v. 110, n. 2, pp. 345–349, maio 1988.
- [24] RAHMAN, M., SHARIF, M. A. R. “Numerical study of laminar natural convection in inclined rectangular enclosures of various aspect ratios”, *Numerical Heat Transfer*, v. 44, pp. 355–373, 2003.
- [25] SAHA, S. K. “Numerical study of laminar natural convection heat transfer in inclined trapezoidal enclosure”, *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, v. 11, 2019.
- [26] HAAJIZADEH, M., OZGUC, A., TIEN, C. “Natural convection in a vertical porous enclosure with internal heat generation”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 10, pp. 1893 – 1902, 1984.
- [27] BLYTHE, P. A., DANIELS, P. G., SIMPKINS, P. G. “Convection in a fluid-saturated porous medium due to internal heat generation”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 12, n. 5, pp. 493–504, 1985.
- [28] PRASAD, V., CHUI, A. “Natural convection in a cylindrical porous enclosure with internal heat generation”, *Journal of Heat Transfer*, v. 111, n. 4, pp. 916 – 925, 1989.
- [29] MACK, L. R., BISHOP, E. H. “Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers”, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 21, n. 2, pp. 223–241, 1968.
- [30] POWE, R. E., CARLEY, C. T., BISHOP, E. H. “Free convective flow patterns in cylindrical annuli”, *Journal of Heat Transfer*, v. 91, n. 3, pp. 310–314, 1969.

- [31] POWE, R. E., CARLEY, C. T., CARRUTH, S. L. “A numerical solution for natural convection in cylindrical annuli”, *Journal of Heat Transfer*, v. 93, n. 2, pp. 210–220, 1971.
- [32] KUEHN, T., GOLDSTEIN, R. “Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 19, n. 10, pp. 1127–1134, 1976.
- [33] KUEHN, T. H., GOLDSTEIN, R. J. “An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 74, pp. 695–719, 1976.
- [34] KUEHN, T., GOLDSTEIN, R. “An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli”, *Journal of Heat Transfer*, v. 100, n. 4, pp. 635–640, 1978.
- [35] CALTAGIRONE, J. P. “Thermoconvective instabilities in a porous medium bounded by two concentric horizontal cylinders”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 76, pp. 337–362, 1976.
- [36] BURNS, P. J., TIEN, C. L. “Natural convection in porous-media bounded by concentric spheres and horizontal cylinders”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 22, n. 6, pp. 929–939, 1979.
- [37] FAROUK, B., GUÇERİ, S. I. “Laminar and turbulent natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders”, *Journal of Heat Transfer*, v. 104, n. November 1982, pp. 631–636, 1982.
- [38] VASSEUR, P., HUNG NGUYEN, T., ROBILLARD, L., et al. “Natural convection between horizontal concentric cylinders filled with a porous layer with internal heat generation”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, v. 27, n. 3, pp. 337–349, 1984.
- [39] TSUI, Y. T., TREMBLAY, B. “On transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric, horizontal cylinders with isothermal surfaces”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 1, pp. 103–111, 1984.
- [40] SENT, M., TORRANCE, K. E. “Natural convection in a thin horizontal porous annulus”. 1987.
- [41] HIMASEKHAR, K., BAU, H. H. “Two-dimensional bifurcation phenomena in thermal-convection in horizontal, concentric annuli containing saturated porous-media”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 187, pp. 267–300, 1988.

- [42] STORESLETTEN, L., TVEITEREID, M. “Natural convection in a horizontal porous cylinder”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 34, n. 8, pp. 1959 – 1968, 1991.
- [43] STEWART, W. E., BURNS, A. S. “Convection in a concentric annulus with heat generating porous media and a permeable inner boundary”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 19, pp. 859–868, 1992.
- [44] GARG, V. K., SZERI, A. Z. “Natural convection in a horizontal concentric cylindrical annulus”. 1992.
- [45] BARBOSA MOTA, J. P., SAATDJIAN, E. “Natural convection in a porous, horizontal cylindrical annulus”, *ASME. J. Heat Transfer*, v. 116, n. 3, pp. 621–626, 1994.
- [46] BARBOSA MOTA, J. P., SAATDJIAN, E. “Natural-convection in porous cylindrical annuli”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 5, n. 1, pp. 3–12, 1995.
- [47] BARBOSA MOTA, J. P., SAATDJIAN, E. “On the reduction of natural convection heat transfer in horizontal eccentric annuli containing saturated porous media”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 7, n. 4, pp. 401–416, 1997.
- [48] GUJ, G., STELLA, F. “Natural convection in horizontal eccentric annuli: Numerical study”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 27, n. 1, pp. 89–105, 1995.
- [49] YOO, J.-S. “Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 42, pp. 3279–3290, 1999.
- [50] SCURTU, N. D., POSTELNICU, A., POP, I. “Free convection between two horizontal concentric cylinders filled with a porous medium - a perturbed solution”, *Acta Mechanica*, v. 151, n. 1-2, pp. 115–125, 2001.
- [51] SHU, C., XUE, H., ZHU, Y. “Numerical study of natural convection in an eccentric annulus between square outer cylinder and a circular inner cylinder using a DQ method”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 44, pp. 3321–3333, 2001.

- [52] MIZUSHIMA, J., HAYASHI, S., ADACHI, T. “Transitions of natural convection in a horizontal annulus”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 44, pp. 1249–1257, 2001.
- [53] YOO, J.-S. “Dual free-convective flows in a horizontal annulus with a constant heat flux wall”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 46, pp. 2499–2503, 2003.
- [54] KUMARI, M., NATH, G. “Unsteady natural convection from a horizontal annulus filled with a porous medium”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, pp. 5001–5007, 2008.
- [55] ALDOSS, T. K. “Natural convection from a horizontal annulus filled with porous medium of variable permeability”. 2009.
- [56] YUAN, X., TAVAKKOLI, F., VAFAI, K. “Analysis of natural convection in horizontal concentric annuli of varying inner shape”, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, v. 68, n. 11, pp. 1155–1174, 2015.
- [57] ABAHRI, O., SADAQUI, D., MANSOURI, K., et al. “Thermogravitational separation in horizontal annular porous cell”, *Mechanics and Industry*, v. 18, 2017.
- [58] ROY, N. C., GORLA, R. S. R. “Natural convection of a chemically reacting fluid in a concentric annulus filled with non-Darcy porous medium”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 127, pp. 513–525, 2018.
- [59] SANTOS, B. M., ARRUDA, W. F., JIAN, S. “Two-dimensional computacional simulation in a cylinder by natural convection”. In: *ENCIT 2018 - 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, 2018.
- [60] JA, A., CHEDDADI, A. “Initial conditions effect on thermosolutal natural convection in a horizontal annular porous cavity”. In: *Proceedings of the 5th International Conference of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer (FFHMT'18)*, v. 0. Avestia Publishing, 2018.
- [61] TOUZANI, S., CHEDDADI, A., OUAZZANI, M. T. “Natural convection in a horizontal cylindrical annulus with two isothermal blocks in median position: Numerical study of heat transfer enhancement”, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, v. 13, pp. 327–334, 2020.
- [62] KUMAR, R. “Study of natural convection in horizontal annuli”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 31(6), pp. 1137–1148, 1988.

- [63] KUMAR, R., KEYHANI, M. “Flow visualization studies of natural convective flow in a horizontal cylindrical annulus”, *Trans. ASME J. Heat Transfer*, v. 112, pp. 784–787, 1990.
- [64] LAI, F. “Improving effectiveness of pipe insulation by using radial baffles to suppress natural convection”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 4, pp. 899 – 906, 1993.
- [65] NISHIMURA, T., KUNITSUGU, K., ITOH, T. “Natural convection suppression by azimuthal partitions in a horizontal porous annulus”, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, v. 29, n. 1, pp. 65–81, 1996.
- [66] BAYTAS, A., GROSAN, T., POP, I. “Free Convection in spherical annular sectors filled with a porous medium”, *Transport in Porous Media*, v. 49, n. 2, pp. 191–207, 01 2002.
- [67] LEMOS, M. J. S., MASCIARELLI, C. B. “Turbulent natural convection in a composite annulus using a novel numerical scheme and the thermal nonequilibrium hypothesis”, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, v. 71, n. 8, pp. 837–854, 2017.
- [68] ÖZISIK, M. N. *Heat Conduction*. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [69] COTTA, R. M., KNUPP, D. C., QUARESMA, J. N. N. “Analytical Methods in Heat Transfer”. In: Kulacki, F. A. (Ed.), *Handbook of Thermal Science and Engineering*, pp. 1–66, Cham, Springer International Publishing, 2017.
- [70] COTTA, R. M. “Diffusion in media with prescribed moving boundaries: application to metals oxidation at high temperatures”. In: *Proceedings of the 2nd Latin American Congress of Heat & Mass Transfer*, v. 1, pp. 502–513, São Paulo, SP, Brazil, 1986.
- [71] COTTA, R. M., OZISIK, M. N. “Laminar forced convection inside ducts with periodic variation of inlet temperature”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 29, pp. 1495–1501, 1986.
- [72] SERFATY, R., COTTA, R. M. “Integral transform solutions of diffusion problems with nonlinear equation coefficients”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 17, pp. 851–864, 1990.
- [73] COTTA, R. M. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1993.

- [74] COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D. *Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*. England, John Wiley Sons, 1997.
- [75] COTTA, R. M. *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*. New York, Begell House, Inc., 1998.
- [76] COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D. “Integral transform method”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 17, n. 3, pp. 156–161, 1993.
- [77] COTTA, C. P. N. *Solução Híbridas para Problemas Conjugados Condução-Convecção Externa Transiente*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.
- [78] WOLFRAM, S. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood City, CA, Addison-Wesley, 1991.
- [79] ALVES, L. S. B. *Análise de estabilidade na convecção natural transiente em cavidades porosas: -solução híbrida numérica-analítica e computação mista simbólica-numérica*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.
- [80] GUERRERO, J., COTTA, R. “Integral transform solution for the lid-driven cavity flow problem in streamfunction-only formulation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 15, n. 4, pp. 399 – 409, 1992.
- [81] GUIGON, J. M. B. S., PÉREZ GUERRERO, J. S., COTTA, R. M. “Computational optimization for integral transform algorithms applied to the lid-driven cavity flow problem”, *Revista de Engenharia Térmica*, v. 6, n. 1, pp. 104 – 113, 2007.
- [82] MACHADO, H. A., COTTA, R. M. “Analysis of internal convection with variable physical properties via integral transformation”, *Numerical Heat Transfer Part A - Applications*, v. 36, n. 7, pp. 699–724, 1999.
- [83] COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C. “Nonlinear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 26, n. 3, pp. 767–789, 2016.
- [84] AN, C., VIEIRA, C. B., SU, J. “Integral transform solution of natural convection in a square cavity with volumetric heat generation”, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 30, n. 4, pp. 883–896, 2013.

- [85] ALVES, L. S. D. B., COTTA, R. M. “Transient natural convection inside porous cavities: hybrid numerical-analytical solution and mixed symbolic-numerical computation”, *Numerical Heat Transfer Part A: Applications*, v. 38, n. 1, pp. 89–110, 2000.
- [86] ALVES, L. S., COTTA, R. M., PONTES, J. “Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 6, pp. 1185–1195, 2002.
- [87] MACHADO DOS SANTOS, B., DE SÁ, L. S. S., SU, J. “Natural convection in a horizontal annular sector containing heat-generating porous medium”, *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, v. 32, n. 1, pp. 387–403, 2022.
- [88] HIRATA, S. C., GOYEAU, B., GOBIN, D., et al. “Linear stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial modelling”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 50, pp. 1356–1367, 2007.
- [89] HIRATA, S. C., GOYEAU, B., GOBIN, D., et al. “Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Equivalence of the one- and two-domain approaches”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, pp. 533–536, 2009.
- [90] LISBOA, K. M., SU, J., COTTA, R. M. “Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 74, n. 3, pp. 1068–1086, 2018.
- [91] LISBOA, K. M., COTTA, R. M. “Hybrid integral transforms for flow development in ducts partially filled with porous media”, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, v. 474, 2018.
- [92] LEAL, M. A., PÉREZ-GUERRERO, J. S., COTTA, R. M. “Natural convection inside two-dimensional cavities: The integral transform method”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 15, n. 2, pp. 113–125, 1999.
- [93] LEAL, M., MACHADO, H., COTTA, R. “Integral transform solutions of transient natural convection in enclosures with variable fluid properties”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, n. 21, pp. 3977 – 3990, 2000.

- [94] COTTA, R. M. “Benchmark results in computational heat and fluid flow: The integral transform method”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 37, pp. 381–393, 1994.
- [95] LISBOA, K. M., SU, J., COTTA, R. M. “Vector eigenfunction expansion in the integral transform solution of transient natural convection”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 29, n. 8, pp. 2684–2708, 2019.
- [96] PÉREZ-GUERRERO, J. S. *Solução das equações de Navier-Stokes em formulação de função corrente via transformação integral*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1991.
- [97] SERFATY, R., COTTA, R. M. “Hybrid analysis of transient non-linear convection-diffusion problems”, *International Journal for Numerical Method Heat and Fluid Flow*, v. 2, pp. 55–62, 1992.
- [98] BAOHUA, C., COTTA, R. M. “Integral transform analysis of natural convection in porous enclosures”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 17, n. 9, pp. 787–801, 1993.
- [99] MACHADO, H., COTTA, R. “Integral transform method for boundary layer equations in simultaneous heat and fluid flow problems”, *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, v. 5, n. 3, pp. 225–237, 1995.
- [100] PÉREZ GUERRERO, J., COTTA, R. “Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 20, pp. 1203–1213, 1995.
- [101] PEREIRA, L. M., PÉREZ-GUERRERO, J. S., COTTA, R. M. “Integral transformation of the Navier-Stokes equations in cylindrical geometry”, *Computational Mechanics*, v. 21, pp. 60–70, 1998.
- [102] SOUZA, M. D., MIRANDA, R. F. D., MACHADO, H. A. “Natural convection in enclosures with variable fluid properties”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 13, pp. 1079–1096, 2003.
- [103] FU, G., AN, C., SU, J. “Integral transform solution of natural convection in a cylinder cavity with uniform internal heat generation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 28, n. 7, pp. 1556–1578, 2018.

- [104] PEREIRA, L. M., QUARESMA, J. N. N., PÉREZ GUERRERO, J. S., et al. “Integral transform solution for natural convection within horizontal concentric annular cavities”, *ASME Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 146, n. 5, 2024.
- [105] ÖZISIK, M. N., ORLANDE, H. R., COLAÇO, M. J., et al. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2017.