Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
COPPE
UFRJ

ASPECTOS DA TEORIA DO POTENCIAL APLICADO A PROBLEMAS INVERSOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Nilson Costa Roberty
Carlos José dos Santos Alves

Rio de Janeiro
Dezembro de 2012

ASPECTOS DA TEORIA DO POTENCIAL APLICADO A PROBLEMAS INVERSOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Nilson Costa Roberty, Ph.D.

Prof. Carlos José dos Santos Alves, Ph.D.

Prof. Antonio André Novotny, Ph.D.

Prof. Antonio Roberto da Silva, Dr.

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo , Dr.

Prof. Gladson Octaviano Antunes, Dr.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2012

Rainha, Marcelo Leonardo dos Santos

Aspectos da teoria do potencial aplicado a problemas inversos de reconstrução de fonte./Marcelo Leonardo dos Santos Rainha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

X, 57 p.: il.; $29,7$cm.

Orientadores: Nilson Costa Roberty

Carlos José dos Santos Alves

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 55 – 57.

1. Problemas inversos. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Teoria do potencial. I. Roberty, Nilson Costa *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

A minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ,

- A Deus por guiar minhas decisões.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, (CNPq) pelo auxilio financeiro durante o período de doutoramento no Brasil.
- A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, (CAPES) pelo auxilio referente estágio de doutoramento no Instituto Superior Técnico de Lisboa.
- A minha companheira Daniela Amorim, pela compreensão.
- A minha família e amigos, pelo apoio e confiança. Sem estes que sempre se mantiveram próximos mesmo nos momentos de angustia e duvida, nada disso seria possível.
- Ao meu orientador de mestrado, o Professor Antônio Roberto da Silva, que sempre manteve a sua porta aberta.
- Ao Profrssor Carlos Alves, pelas tardes de inverno do ano de 2012 que passamos no IST (Instituto Superior Técnico de Lisboa), Investigando diversas questões que apresentamos neste trabalho.
- E claro aquele que vem se tornando mais que um mestre, um amigo, ao Professor Nilson Costa Roberty por todos os ensinamentos dentro e fora da sala.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ASPECTOS DA TEORIA DO POTENCIAL APLICADO A PROBLEMAS INVERSOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Dezembro/2012

Orientadores: Nilson Costa Roberty
Carlos José dos Santos Alves

Programa: Engenharia Nuclear

A tese apresenta alguns resultados para reconstrução de fontes no caso da equação de Helmholtz, uma das questões levantadas passa pela análise de duas formulações integrais para a obtenção de uma solução para o problema inverso de identificação de uma fonte relacionada ao problema de Helmholtz. A primeira formulação integral utiliza a teoria clássica do potencial, fazendo uso da função de Green para estabelecer os resultados, a segunda faz uso da formulação variacional para tal, provamos assim que a solução variacional do problema inverso de fonte da equação de Helmholtz tem o mesmo "peso"que a solução que encontramos ao utilizar a função de Green ou uma solução fundamental, e esta é uma de nossas contribuições à literatura. A questão de unicidade de solução do problema inverso de reconstrução de uma fonte característica desconhecida, apartir de leituras feitas na fronteira do domíneo, permanesce em aberto no caso do problema modelado pela equação de Poisson. O capítulo 3 é dividido em duas partes, na primeira assumiremos que o modelo é dado pela equação de Helmholtz modificada, no qual o operador de Laplace é perturbado por um termo de absorção, o Teorema 3.2.2 apresenta neste contexto uma condição suficiente para unicidade do problema inverso de reconstrução de fonte, e depois criamos um método relativamente estável para reconstrução de fontes características relativa ao modelo de Poisson.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ASPECTS OF POTENTIAL THEORY APPLIED TO INVERSE SOURCE RECONSTRUCTION PROBLEMS.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

December/2012

Advisors: Nilson Costa Roberty
Carlos José dos Santos Alves

Department: Nuclear Engineering

In this work, we present some results for reconstruction of sources in the case of the Helmholtz equation, a central issue of this study is to analysis of two integrals formulations to obtain a solution to the inverse problem of identifying a source connected to the Helmholtz problem. The first uses the classical theory of potential, making use of the Green's function for establishing the result, and then using the variational formulation, we prove that the weak solution of the inverse source problem of Helmholtz equation has the same "weight" that the solution found by using the Green function or fundamental solutions, and this is one of our contributions. Considering the uniqueness of the solution of the rebuilding an unknown source characteristics, inside a domain modeled by the Poisson equation, this problem is still open to the present day. The chapter 3 is divided into two pates, first we will assume that the model is given by the modified Helmholtz equation, where the Laplace operator is disturbed by a term of absorption, we proof the Theorem 3.2.2 and in this context present a sufficient condition for uniqueness of the reconstructing source, and then we creating a method relatively stable, for reconstructing the characteristics sources on the Poisson model.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **x**

1 Introdução **1**

1.1 O que é um problema inverso 1

1.2 Algumas Definições e Resultados Necessários 6

2 Formulações Integral e Variacional Para o Problema Inverso de Fonte Associado a Equação de Helmholtz **12**

2.1 Introdução 12

2.2 Questões de Existência e Unicidade 13

2.3 O Mapeamento Fonte - Neumann 17

2.4 Representação integral 23

3 Unicidade e Estabilidade para o Problema Inverso de Reconstrução de Fontes Características **30**

3.1 Introdução 30

3.2 Unicidade 31

3.3 Estabilidade 39

3.4 Método para Reconstrução de Fontes Características para o Operador de Laplace. 47

4 Considerações Finais **53**

4.1 Conclusões 53

4.2 Trabalhos Futuros 53

Referências Bibliográficas **55**

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1 O que é um problema inverso

Uma definição bastante abrangente apresentada no livro [1] diz que:

" *Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados.*"

Do ponto de vista prático, convenciona-se chamar problema direto aquele em que o estudo antecedeu historicamente. Tal ambiguidade (direto/inverso) pode ser exemplificada do seguinte modo: se o modelo matemático é expresso por

$$A(u) = f,$$

o modelo inverso pode ser representado por,

$$A^{-1}(f) = u.$$

Por outro lado, se

$$B = A^{-1},$$

o par (problema direto) - (problema inverso) torna-se,

$$B(f) = u \Rightarrow B^{-1}(u) = f.$$

Na prática, deve-se ter em mente, um modelo matemático (no nosso caso uma EDP) que é usado para descrever um problema físico o qual é modelado a partir de medições confiaveis e testados com dados reais medidos em campo. A bem sucedida reconstrução de imagem não intrusiva médica, a descoberta de óleo de reservatórios a partir de medições sísmicas (para citar alguns) são uma prova de que, podemos de fato, obter algumas informações significativas a partir de limites ou medidas exteriores apesar de vários desafios matemáticos e computacionais. Assumindo que o modelo descreve tal sistema físico com precisão, duas perguntas naturais surgem:

1. Quantas medições devemos considerar a fim de identificar precisamente o objeto responsável pelas medições feitas em campo? .

2. Se duas medições são em certo sentido próximos umas das outras, então podemos ainda esperar que os objetos que geraram tais dados, estejam "próximos"?

Nos exemplos citados acima, estes objetos podem ser um tumor cerebral ou um vazamento de óleo em águas profundas. A primeira é uma questão de identificação ou seja unicidade, a segunda de estabilidade estas são duas das principais questões teóricas na área de problema inverso. O estudo dos problemas inversos em equações diferenciais parciais é uma área de intensiva pesquisa em nossos dias. Escolhi aqui alguns artigos, fazendo injustiça a muitos outros artigos, que apresentam técnicas recentes na investigação de problemas inversos mas de fácil compreensão: [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Do ponto de vista matemático, estes problemas constituem um grande desafio, devido à sua natureza mal posta. Hadamard definiu um problema mal posto como sendo o problema que não satisfaz pelo menos uma das condições a baixo:

(i) Existência de solução;

(ii) Unicidade da Solução;

(iii) Solução dependendo continuamente dos dados, (*estabilidade*).

Faremos agora uma breve introdição do problema inverso a ser concid erado na presente Tese.

Seja Ω um aberto conexo limitado de $\mathbb{R}^d$. Aqui e em todo trabalho, conexo significa conexo por caminhos, isto é: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, existe um caminho contínuo totalmento contido em Ω que liga $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Definimos por $C^k(\Omega)$ o espaço das funções que tem derivada contínua até a ordem k e $C^0(\bar{\Omega})$ o espaço das funções contínuas em $\bar{\Omega}$. Se $u \in C^k(\Omega)$ e $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ definimos

$$a_{ij}D_{ij}u = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \text{ e } b_i D_i = \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Consideremos assim o operador L, tal que

$$Lu = a_{ij}(\mathbf{x})D_{ij}u + b_i(\mathbf{x})D_i u + c(\mathbf{x})u, \tag{1.1}$$

com $a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, ..., n$. Assumimos que:

- $u \in C^2(\Omega)$

- Para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, os coeficientes da matriz a_{ij} são positivos, e que existe para cada $\mathbf{x}$ um autovalor mínimo e máximo, dados respectivamente por $\lambda(\mathbf{x})$ e $\Lambda(\mathbf{x})$ tal que
$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda(\mathbf{x})|\zeta|^2 \leq a_{ij}(\mathbf{x})\zeta_i\zeta_j \leq \Lambda(\mathbf{x})|\zeta|^2$$
para $\zeta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Quando $\lambda \geq \lambda_0 = 0$ dizemos que o operador L é elíptico. Quando $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ tal operador é chamado de estritamente elíptico. Se a matriz a_{ij} é bem condicionada, isto é, $\frac{\Lambda}{\lambda}$ limitado, então L é dito uniformemente elíptico.

Nesta tese trataremos principalmente sobre a reconstrução de uma fonte f com respeito ao problema elíptico,

$$-\Delta u - \kappa^2 u = f, \tag{1.2}$$

Com as condições de contorno usuais para a equação (1.2) que são:

- **Dirichlet**
$$u = g,$$
em $\partial\Omega$. Isto significa que a temperatura (em problemas de condutibilidade térmica) ou a tensão (em problemas eletrostáticos) são impostas.
- **Neumann**
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi,$$
em $\partial\Omega$. Onde ν é o vetor unitário normal exterior ao domíneo e $\partial u/\partial \nu$ é a derivada normal de u. Com esta condição, impomos a temperatura (problemas térmicos) ou corrente (problemas de eletrostática).
- **Robin**
$$au + b\frac{\partial u}{\partial \nu} = \tau$$
em $\partial\Omega$. A condição de contorno de Robin é dada por uma combinação linear de condições de contorno de Dirichlet e Neumann.

O caso em que $\kappa \neq 0$, chamamos (1.2) de equação de Helmholtz (convencional se $\kappa \in \mathbb{R}$ ou modificada se κ é um imaginário puro). A equação de Helmholtz é um exemplo de EDP que modela os harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

O caso em que $k = 0$ chamamos, (1.2) de equação de Poisson a qual é o exemplo clássico para equações diferenciais parciais de segunda ordem elípticas, e é um modelo matemático para alguns fenômenos físicos importantes, como por exemplo:

– Problemas de gravitação: onde u é o campo gravitacional gerado pela distribuição de massa f.

– Problemas de condutividade: para um corpo com condutividade elétrica ou térmica, constante $C(\mathbf{x}) = c$ pata todo $\mathbf{x} \in \Omega$ e sendo u o potencial eléctrico ou térmico, para uma dada fonte f, temos a equação,

$$\nabla(C(\mathbf{x})\nabla u) = f$$

que é iqual a equação de Poisson, $\Delta u = f/c$

O caso $\kappa = 0$ foi estudado por Alves-Martins-Roberty em [8] e por Badia-Duong em [9], [10] consiste em "encontrar" as fontes f para o problema de Poisson definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, uma vez que são fornecidos os dados de Dirichlet e Neumann na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ a qual é exigido que seja regular por partes, mais precisamente:

$$\begin{cases} \Delta u = f & ;\ \Omega \\ u = g & ;\ \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & ;\ \Gamma \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e $f \in L^2(\Omega)$. O par (g, φ) é chamado de dados de Cauchy. Outros trabalhos de mesmo tom, foram desenvolvidos em [11] e [4]. Aqui e em todo o trabalho $H^s(\Gamma)$ denota o espaço de Sobolev, que é encontrado usualmente na literatura, por exemplo em [12] ou [13].

Se considerarmos a unicidade da solução para a reconstrução de uma fonte característica desconhecida a partir de leituras feitas na fronteira do domínio, este problema permanece em aberto no caso dos fenômenos modelados pela equação de Poisson. Um resultado clássico com respeito a questão da unicidade da reconstrução de fontes características assume ainda que o objeto a ser reconstruído possui forma estrelada e foi provado em 1938 por Novikov em [14] e estendido para o caso convexo em uma direção por Isakov em [15], o resultado diz que:

Se a fonte no problema (1.3) é uma função caracteristíca definida a partir de um domíneo com frnteira estrelado, então tal fonte é unicamente determinada pelos dados de Cauchy. Notação: $\Omega \in \mathbb{R}^d$ é um domíneo se Ω é aberto e conexo.

Badia-Duong provaram em [9] o caso onde a fonte do sistema (1.3) é formada por mono polos (combinação de distribuições do tipo deltas de Dirac) ou dipolos (combinações de derivadas de distribuições do tipo deltas de Dirac). O caso planar devido a sua viabilidade computacional em virtude dos métodos de análise numérica, tem tido destaque no cenário da investigação de soluções estáveis em problemas inversos. Para mais informações consulte, [16], [17] e [18].

A tese apresenta uma análise com demonstrações de alguns resultados apresentados nos artigos citados, para o caso da equação de Helmholtz e um método para reconstrução de fontes características relativo ao problema de Poisson. Neste trabalho faremos apenas uma apresentação da teoria necessária para o transcorrer do trabalho, informações adicionais podem ser encontradas em [15], [19] ou [1].

No capítulo 2 fazemos análise de duas formulações integrais para a obtenção de uma solução para o problema inverso de reconstrução de fonte da equação de Helmholtz. A primeira utiliza a teoria clássica do potencial fazendo uso da função de Green. A segunda faz uso da formulação variacional, ao fim do capítulo provamos que a solução variacional do problema inverso de fonte associado a equação de Helmholtz, é equivalente a solução que encontramos ao utilizarmos a função de Green ou uma solução fundamental, e esta é uma de nossas contribuições a literatura.

O capítulo 3 é dividido em duas partes. Na seção 3.2 assumiremos que o modelo é dado pela equação de Helmholtz modificada, no qual o operador de Laplace é perturbado por um termo de absorção, provamos que
Sejam χ_{ω_1}, χ_{ω_2} funções característica, donde ω_1 , $\omega_2 \subset \Omega$ são abertos simplesmente conexos com fronteira de classe C^2. Se $\omega_1 \backslash \omega_2$, $\omega_2 \backslash \omega_1$, $\omega_1 \cap \omega_2$ são simplesmente conexos e considerando os problemas diretos (2.1) com fontes χ_{ω_1}, χ_{ω_2} respectivamente, com os mesmos dados de Cauchy em Γ, então $\omega_1 = \omega_2$.
Este é um fato novo. Na seção 3.4, estabeleceremos um método para reconstrução da fonte desejada, apartir de um quadrado de referência, estabeleceremos um conjunto de normas a formar uma família de subconjuntos admissíveis $\mathcal{B}_n$, passamos então a analisar o problema de mínimo:

$$\|\varphi - \varphi_{B_n}\| = \min_{B \in \mathcal{B}_n} \{\|\varphi - \varphi_B\|\}$$

No fim da seção mostramos que o objeto é consistente e se a fonte for dada por uma função característica estrelada, então ela pode ser reconstruída a partir exclusivamente dos dados de Cauchy (Dirichlet e Neumann) na fronteira do domínio apartir do método proposto.

1.2 Algumas Definições e Resultados Necessários

Nosso objetivo com esta seção é apenas esclarecer alguns resultados que utilizaremos durante a tese em questão, não temos assim por finalidade deixar o texto auto contido. Não serão apresentadas demonstrações nesta seção.

Teorema 1.2.1 *(Teorema da aplicação aberta) Sejam* $E; F$ *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *uma aplicação linear limitada e sobrejetiva. Então existe* $r > 0$ *tal que* $B_r(0) \subset T(B_1(0))$ *Em particular,* T *e uma aplicação aberta*

Teorema 1.2.2 *Seja* E *um espaço de Banach. Se* $B \subset E$ *é limitado na topologia fraca de* E*, então* B *é limitado em* E*.*

Teorema 1.2.3 *Seja* E *um espaço de Banach. Se* $\{f_n\} \subset E$ *é uma sequência limitada em* E*, então existem uma subsequência* $\{f_{n_k}\}$*, de* $\{f_n\}$ *e* $f \in E$*, tal que* $\{f_{n_k}\}$*, converge fraco para* f *em* E*.*
Notação $f_{n_k} \rightharpoonup f$ *em* E

Prova Uma demonstração para os resultados precedentes podem ser encontradas em [20] capítulos 3 e 4.

Teorema 1.2.4 *(Teorema do Traço) A aplicação traço*

$$u \in \{u \in H^1(\Omega); \quad \Delta u \in L^2(\Omega)\} \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma),$$

é linear e contínua. Tem-se a seguinte formula de Green:

$$< -\Delta u, v >_{L^2(\Omega)} = < u, -\Delta v >_{L^2(\Omega)} - < \gamma_1 u, \gamma_0 u >_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} + < \gamma_0 u, \gamma_1 u >_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}} \tag{1.4}$$

para todo $u, v \in H^1(\Omega)$

Prova Uma demonstração para os resultados precedentes podem ser encontradas no capítulo final de [21].

Faremos agora uma apresentação da função de Green para a equação de Helmholtz.

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com fronteira suave. Considere a equação diferencial homogênea de Helmholtz, com condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta - \kappa^2)u = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Definição 1.2.1 *Diremos que Φ é uma solução fundamental da equação de Helmholtz (1.5), se Φ satisfaz;*

$$(-\Delta - \kappa^2)\Phi = \delta, \ \zeta \in \Omega \tag{1.6}$$

onde $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ é a "localização"da distribuição δ de Dirac e portanto, $\Phi(\zeta, \mathbf{x}) = \Phi(\zeta - \mathbf{x})$.

Definição 1.2.2 *Diremos que G_Φ é uma solução regular da equação de Helmholtz, (1.5), se G_Φ satisfaz;*

$$\begin{cases} (-\Delta - \kappa^2)G_\Phi(\zeta, \mathbf{x}) = 0 & \zeta \in \Omega \\ G_\Phi|_{\partial\Omega} = \Phi(\zeta, \mathbf{x}) & \zeta \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

e Φ é como na definição 1.2.1, $\mathbf{x} \in \Omega$

Definição 1.2.3 *Diremos que G é a função de Green associada a equação de Helmholtz (1.5), se G satisfaz;*

$$\begin{cases} (-\Delta - \kappa^2)G(\zeta, \mathbf{x}) = \delta(\zeta - \mathbf{x}) & \zeta \in \Omega \\ G|_{\partial\Omega} = 0 & \zeta \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Uma exigência geométrica que da função de Green é que G satisfaça $G(\zeta, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \zeta)$, sendo assim podemos observar que

$$G(\zeta, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(\Phi(\zeta, \mathbf{x}) + G_\Phi(\zeta, \mathbf{x})) + (\Phi(\mathbf{x}, \zeta) + G_\Phi(\mathbf{x}, \zeta))]$$

No exemplo que segue, daremos uma forma explícita para a função de Green em questão, no caso particular em que $d = 2$ e Ω é o disco unitário.

Exemplo 1.2.1 *Tomemos $d = 2$ e $\Omega = D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \ |\mathbf{x}| < 1\}$, temos que uma solução fundamental Φ para a equação de Helmholtz (1.5), será dada por:*

$$\Phi(\zeta, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4}Y_0(\kappa|\zeta - \mathbf{x}|).$$

Aqui, Y_0 é a função de Bessel se segunda espécie e ordem zero,

$$\begin{aligned} Y_0(a) &= -\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m H_m}{(m!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 m \\ &+\frac{2}{\pi}J_0(a)\left[\ln\left(\frac{a}{2}\right)+\gamma\right] \end{aligned}$$

onde $\gamma = 0,577256...$, é a conhecida constante de Euler,

$$H_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \text{ (Soma harmônica)}$$

e J_0 é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, isto é,

$$J_0(a) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 m$$

donde $a \in (0, \infty)$.

Passando a coordenadas polares,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi & 0 \le \rho < 1 \\ \zeta = (\sigma\cos\beta, \sigma\sin\beta) & 0 \le \beta \le 2\pi & 0 \le \sigma < 1. \end{array}$$

Tome $a = |\zeta - \mathbf{x}| = \sqrt{\sigma^2 + \rho^2 - 2\rho\cos(\beta - \theta)}$, desta forma, temos que

$$\begin{aligned} Y_0(\kappa a) &= \textstyle\sum_{z\in\mathbb{Z}} J_n(\kappa\rho)Y_n(\kappa\sigma)\cos[n(\beta-\theta)] \\ 0 &= \textstyle\sum_{z\in\mathbb{Z}} J_n(\kappa\rho)Y_n(\kappa\sigma)\sin[n(\beta-\theta)] \end{aligned}$$

em consequência obtêm-se,

$$Y_0(\kappa a) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} J_n(\kappa\rho)Y_n(\kappa\sigma)e^{in(\beta-\theta)} \tag{1.9}$$

onde os Y_n representam as funções de Bessel de segunda espécie e ordem n, mais precisamente,

$$\begin{aligned} Y_n(a) &= -\frac{H_n}{\pi n!}\left(\frac{a}{2}\right)^n \\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2m-n} \\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m H_m + H_m + n}{m!(m+n)!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 m+n \\ &+\frac{2}{\pi}J_n(a)\left[\ln\left(\frac{a}{2}\right)+\gamma\right], \end{aligned}$$

e J_n *são as funções de bessel de primeira espécie e ordem* n,

$$J_n(a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+n}$$

donde $a \in (0, \infty)$. *Obtendo então*

$$\Phi(\zeta, \mathbf{x}) = \Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta) = -\frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbb{Z}} J_n(\kappa\rho) Y_n(\kappa\sigma) e^{n(\beta-\theta)}. \tag{1.10}$$

Note ainda que pelo Teorema da adição [22]

$$\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta) = \Phi(\rho, \theta, \sigma, \beta)$$

conseguentemente

$$G(\rho, \theta, \sigma, \beta) = \Phi(\rho, \theta, \sigma, \beta) + \frac{1}{2}[G_\Phi(\rho, \theta, \sigma, \beta) + G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta)].$$

Passaremos agora a construção da solução regular para a equação de Helmholtz, apresentada na definição 1.2.2. Segue do método de separação de variáveis que

$$G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\rho, \theta) J_n(\kappa\sigma) e^{in\beta} \tag{1.11}$$

onde $c_{-n} = \overline{c_n}$ *será determinado pela condição de fronteira. Com efeito*

$$G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta)|_{|\zeta|=1} = G_\Phi(1, \beta, \rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\rho, \theta) J_n(\kappa) e^{in\beta}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta)|_{|\zeta|=1} &= \Phi(\zeta, \mathbf{x})|_{\partial D} \\
&= \frac{1}{4} Y_0(\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\beta - \theta)}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbb{Z}} J_n(\kappa\rho) Y_n(\kappa) e^{in(\beta-\theta)} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbb{Z}} J_n(\kappa) Y_n(\kappa\rho) e^{in(\beta-\theta)}.
\end{aligned}$$

Obtemos asssim as segintes identidades:

$$\begin{aligned}
c_n(\rho, \theta) J_n(k) = \tfrac{Y_n(\kappa) J_n(\kappa\rho)}{4} e^{-in\theta} \quad &\therefore \quad c_n(\rho, \theta) = \tfrac{Y_n(\kappa) J_n(\kappa\rho)}{4 J_n(k)} e^{-in\theta} \\
c_n(\rho, \theta) J_n(k) = \tfrac{Y_n(\kappa\rho) J_n(\kappa)}{4} e^{-in\theta} \quad &\therefore \quad c_n(\rho, \theta) = \tfrac{Y_n(\kappa\rho) J_n(\kappa)}{4 J_n(k)} e^{-in\theta}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Substituindo (1.12) em (1.11) obtemos,

$$G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{Y_n(\kappa) J_n(\kappa\rho)}{J_n(k)} J_n(\kappa\sigma) e^{in(\beta-\theta)}$$

e

$$G_\Phi(\sigma, \beta, \rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{Y_n(\kappa\rho) J_n(\kappa)}{J_n(k)} J_n(\kappa\sigma) e^{in(\beta-\theta)}$$

analogamente,

$$G_\Phi(\rho, \theta, \sigma, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{Y_n(\kappa) J_n(\kappa\sigma)}{J_n(k)} J_n(\kappa\rho) e^{in(\theta-\beta)}$$

e

$$G_\Phi(\rho, \theta, \sigma, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{Y_n(\kappa\sigma) J_n(\kappa)}{J_n(k)} J_n(\kappa\rho) e^{in(\theta-\beta)}.$$

Portanto a função de Green associada a equação de Helmholtz é explicitamente dada por

$$\begin{aligned} G(\rho, \theta, \sigma, \beta) = \quad & -\tfrac{1}{8} \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(\kappa) Y_n(\kappa\sigma) - Y_n(\kappa) J_n(\kappa\sigma)}{J_n(\kappa)} J_n(\kappa\rho) e^{in(\beta-\theta)} \\ & -\tfrac{1}{8} \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(\kappa) Y_n(\kappa\rho) - Y_n(\kappa) J_n(\kappa\rho)}{J_n(\kappa)} J_n(\kappa\sigma) e^{in(\theta-\beta)}. \end{aligned}$$

Em diversos textos a função de Green é também chamada de núcleo de Green. Observe ainda que a derivada na direção normal exterior satisfaz a equação de Helmholtz. Passaremos agora a calcular tal derivada.

Recordemos que no caso em questão,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} G(\zeta, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \sigma} G(\rho, \theta, \sigma, \beta).$$

Considere a identidade do Wronskiano com respeito as funções de Bessel,

$$J_n(a) Y_n' a - J_n'(a) Y_n(a) = \frac{2}{\pi a} \tag{1.13}$$

podemos então mostrar explicitamente que,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} G(\rho, \theta, \sigma, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(\kappa\rho)}{J_n(\kappa)} e^{in(\beta-\theta)} \tag{1.14}$$

Se $\kappa = i\kappa$ então temos a equação de Helmholtz modificada, donde $I_n(a) = J_n(ia) e^{in\pi/2}$

Por questão de simplicidade, passaremos a chamar a derivada normal da função de Green associada a equação modificada de Helmholtz, por **núcleo**

de Helmholtz, *a qual será dada por;*

$$P_\kappa(\rho, \beta - \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{I_{|n|}(\kappa\rho)}{I_{|n|}(\kappa)} e^{in(\beta-\theta)} \tag{1.15}$$

Reforço aqui que este capítulo não tem o objetivo de deixar a Tese auto contida. Aqui apresentamos apenas os resultados que foram utilizados sem demonstração no decorrer da Tese, desta forma não nos preocupamos em desenvolver a teoria que origina cada um dos presentes resultados.

Capítulo 2

Formulações Integral e Variacional Para o Problema Inverso de Fonte Associado a Equação de Helmholtz

2.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com fronteira suave, a qual representaremos por Γ. Seja κ um número real, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $f \in L^2(\Omega)$. O problema direto com operador de Helmholtz consiste em encontrar um campo regular u que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = f & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{em } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

O sistema (2.1) tem uma solução única $u \in H^1(\Omega)$ quando κ^2 não é um autovalor do Laplaciano. O Teorema do Traço 1.2.4, assegura a existência de uma função $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, que é o traço normal de u (ou derivada na direção normal exterior de u), isto é,

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}. \tag{2.2}$$

Quando κ é um número real positivo ou um número imaginário puro temos respectivamente a equação Helmholtz propriamente ou o problema modificado de Helmholtz. Quando $\kappa = 0$ obtemos a equação de Poisson.

Usualmente, os problemas direto e inverso podem ser formulados com apenas um sistema de equações fornecidos os dados de Cauchy (g, φ), desejamos encontrar $(u, f) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = f & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{em } \Gamma \\ \gamma_1 u = \varphi & \text{em } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Vamos considerar para uso futuro os conjuntos :

$$\Sigma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : -\Delta u = \lambda u \text{ em } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\} \tag{2.4}$$

$$\Sigma_4 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta^2 u = \lambda u \text{ em } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\} \tag{2.5}$$

Definição 2.1.1 *Diremos que uma função v é metaharmônica se $-\Delta v - \kappa^2 v = 0$. A coleção de todas as funções metaharmônicas, será denotada por:*

$$H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega); -\Delta v - \kappa^2 v = 0\} \tag{2.6}$$

onde $\kappa^2 \notin \Sigma_2$ e $\kappa^4 \notin \Sigma_4$.

O capítulo que segue tem como objetivo mostrar que se o problema inverso de fonte (2.3) tem uma solução variacional, então existe uma solução clássica no sentido da teoria do potencial para o problema inverso de fonte associado a equação de Helmholtz. A recíproca deste afirmação é um fato conhecido na literatura, o qual pode ser encontrado em [19], mesmo assim, daremos uma nova demonstração utilizando as ferramentas desenvolvidas ao longo do texto. Afim de provar tais resultados, mostramos também que o conjunto das funções metaharmônicas em Ω é homeomorfo a $H^{1/2}(\Gamma)$. Ambos os resultados foram publicados em [23].

2.2 Questões de Existência e Unicidade

Definição 2.2.1 *Consideremos o problema (2.1) com fonte zero, ou seja, $f = 0$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Este problema tem uma solução $w^0 \in H^1(\Omega)$. Desta forma, definimos o mapeamento de Dirichlet para Neumann da equação de Helmholtz como sendo o operador,*

$$\begin{aligned} \Lambda^0 : H^{1/2}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ \Lambda^0[g](\mathbf{x}) &= \frac{\partial w^0}{\partial \nu}(\mathbf{x}) \ \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pelo Teorema do Traço 1.2.4 o operador é bem definido linear e contínua.

Observação 2.2.1 *Poderíamos estabelecer o mapeamento de Dirichlet para Neumann 2.2.1 assumindo a fonte f não identicamente nula. Com efeito:*

$$\Lambda^f : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

com $\Lambda^f[g](\mathbf{x}) = \frac{\partial w^f}{\partial \nu}(\mathbf{x})$ $\mathbf{x} \in \Gamma$, onde w^f é a solução de (2.1).

Teorema 2.2.1 *Seja* $(g, \varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. *Então uma função* $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ *é uma solução para o problema inverso (2.3) se e somente se* $\varphi - \Lambda^0 g \in H^{1/2}(\Gamma)$ *onde* Λ^0 *é o mapeamento de Dirichlet para Neumann definido em 2.2.1.*

Prova: Suponha que $\varphi - \Lambda^0 g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Considere o problema auxiliar de quarta ordem,

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \kappa^4)w = 0 & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w = 0 & \text{em } \Gamma \\ \gamma_1 w = \varphi - \Lambda^0 g & \text{em } \Gamma \end{cases} \tag{2.8}$$

O problema de quarta ordem está bem definido e admite uma única solução $w \in H^2(\Omega)$. Tome $f = (-\Delta - \kappa^2)w$, note que $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$. Basta agora encontrarmos $u \in H^1(\Omega)$. Tome $u = w^0 + w$, onde w^0 é a solução do problema homogênea na definição 2.2.1 do mapeamento de Dirichlet para Neumann. Como w e w_0 são únicos, temos que o problema inverso admite solução única.

Reciprocamente, suponha que existam $(u, f) \in H^1(\Omega) \times H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ que é solução do problema inverso (2.3). Considere o problema de segunda ordem com dados de fronteira homogênea

$$\begin{cases} (-\Delta - \kappa^2)w_0 = \ f & \mathbf{x} \in \Omega \\ \gamma_0 w_0 = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases}$$

este problema admite uma única solução $w_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema Traço temos $\gamma_1 w_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$. Note que $\varphi = \gamma_1 w_0 + \gamma_1 w^0$, onde $\gamma_1 w^0 = \Lambda^0 g$. Assim, $\gamma_1 w_0 = \varphi - \Lambda^0 g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

□

Observação 2.2.2 *Com o Teorema 2.2.1, provamos a existência e unicidade da solução para (2.3) em* $H^1(\Omega) \times H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$. *No entanto, isto não quer dizer que quando fizermos a pesquisa em um espaço maior, por exemplo, se investigarmos as soluções em* $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *vamos continuar a ter unicidade. Na verdade, vamos provar na próxima proposição que para toda* $f \in L^2(\Omega)$, *existem únicas funções* $f_0 \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ *e* $v \in [H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)]^\perp$ *tal que* $f = f_0 + v$. *O teorema anterior, prova apenas que tendo os dados de Cauchy de tal forma que,* $\varphi - \Lambda(g) \in H^{1/2}(\Gamma)$ *então existe* f_0, *sendo assim ignorando a parte* v *da solução real do problema em questão. Chamaremos* f_0 *de parte observável de* f.

A partir de agora, estamos supondo sempre que $\kappa^2 \notin \Sigma_2$ e $\kappa^4 \notin \Sigma_4$.

Lema 2.2.1 $L^2(\Omega) = H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \oplus (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$.

Prova. Seja $f \in L^2(\Omega)$, considere o problema (2.1) com dado de Dirichlet $g = 0$. Tal problema é bem posto e por regularidade elíptica admite solução $w_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e traço normal $\gamma_1 w_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Além disso, já que $\kappa^4 \notin \Sigma_4$, o problema de quarta ordem (2.8), com dados de Cauchy $(0, \gamma_1 w_0) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tem solução $v \in H^2(\Omega)$. Defina

$$w := w_0 - v \in H_0^2(\Omega) \tag{2.9}$$

e por sua vez, pelo sistema (2.1) tem-se

$$f = (-\Delta - \kappa^2)w_0 = (-\Delta - \kappa^2)v + (-\Delta - \kappa^2)w, \tag{2.10}$$

onde $(-\Delta - \kappa^2)v \in H_{-\Delta+\kappa^2}$ e $(-\Delta - \kappa^2)w = z \in (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2]$. Obtemos que dada $f \in L^2(\Omega)$, f é a soma de uma função em $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ com uma função em $(-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$. Resta mostrar:

$$H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \cap (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)] = \{0\}.$$

Com isto teremos provado de que $L^2(\Omega) = H_{-\Delta+\kappa^2} \oplus (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$. Com efeito, tome u pertencente a $H_{-\Delta+\kappa^2} \cap (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$. Então

$$(-\Delta + \kappa^2)u = 0 \text{ e } u = (-\Delta - \kappa^2)v, \text{ para algum } v \in H_0^2(\Omega)$$

Com isto, temos que v é uma solução de problema de quarta ordem homogêneo (2.8), isto é, com fonte e dados de Cauchy zero. Claro, que desde que $\kappa^4 \notin \Sigma_4$, a única solução para o problema, é a trivial $v = 0$, uma vez que $u = (-\Delta - \kappa^2)v = 0$. Desta forma, provamos que $L^2(\Omega) = H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \oplus (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$.

□

Lema 2.2.2 $(-\Delta - \kappa^2)\,[H_0^2(\Omega)] = [H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)]^\perp$.

Prova: Sejam $v \in (-\Delta - \kappa^2)\,[H_0^2(\Omega)]$ e $f \in H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$, então existe $w \in H_0^2(\Omega)$, tal que $v = (-\Delta - \kappa^2)w$. Aplicando a segunda formula de Green obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fv dx &= \int_\Omega f(-\Delta - \kappa^2)w dx \\
&= \int_\Omega f(-\Delta w)dx - \kappa^2 \int_\Omega fw dx \\
&= \int_\Omega (-\Delta f)w dx - \kappa^2 \int_\Omega fw dx + \int_\Gamma (w\frac{\partial f}{\partial_\nu} - f\frac{\partial w}{\partial_\nu})d\sigma \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $w \in H_0^2(\Omega)$. Como $v \in (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $< f, v >_{L^2(\Omega)}= 0$, logo vale a inclusão

$$(-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)] \subset H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega).$$

Seja $f \in L^2(\Omega)$, suponha que f é ortogonal a v para todos os $v \in H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$. Tome w sendo a solução de (2.1) com fonte f e dado de Dirichlet $g = 0$, por regularidade elíptica, temos que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ em particular, pelo Teorema do Traço 1.2.4 $\gamma_1 w \in H^{1/2}(\Gamma)$. Desta forma, tome v solução do problema homogêneo de Helmholtz com dado de Dirichlet na fronteira sendo $\gamma_1 w$. Segue da hipótese e da segunda identidade de Green 1.4, aplicada em $f = -\Delta w - \kappa^2 w$ e v que,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega f v dx \\
&= \int_\Omega (-\Delta w - \kappa^2 w) v dx \\
&= \int_\Omega (-\Delta w) v dx - \kappa^2 \int_\Omega w v dx \\
&= \int_\Omega w(-\Delta v) dx - \kappa^2 \int_\Omega w v dx + \int_\Gamma (w\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial w}{\partial \nu}) d\sigma \\
&= \int_\Omega w(-\Delta v - \kappa^2 v) dx \int_\Gamma (w\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial w}{\partial \nu}) d\sigma \\
&= -\int_\Gamma (\frac{\partial w}{\partial \nu})^2 d\sigma,
\end{aligned}$$

portanto $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ em Γ. Assim, dada uma função arbitrária em $[H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)]^{\perp}$, tal função pertence a $(-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$ donde segue a inclusão inversa.

□

Proposição 2.2.1 *Se $\kappa^2 \notin \Sigma_2$ e $\kappa^4 \notin \Sigma_4$, então*

$$L^2(\Omega) = [H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)]^{\perp} \oplus H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$$

Prova. Este fato é consequência imediata dos lemas 2.2.1 e 2.2.2 anteriores.

□

Corolário 2.2.1 *$H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.*

Prova. Vamos considerar a projeção canônica

$$\begin{array}{rcccccc}
\pi_2 : L^2(\Omega) = & H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) & \oplus & H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) & \longrightarrow & H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) \\
& f & + & v & \longmapsto & v.
\end{array}$$

Note que π_2 é contínua, logo $\pi_2^{-1}[0]$ é fechado. Como

$$\pi_2^{-1}[0] = [f, 0]$$

onde $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$, segue-se que $\{0\} \times H_{\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é fechado. Consequentemente $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$ em particular um espaço de Hilbert. Portanto, $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com a norma induzida de $L^2(\Omega)$.

$\square$

2.3 O Mapeamento Fonte - Neumann

Definição 2.3.1 *Consideremos o problema (2.1) com dado de Dirichlet zero, isto é, $g = 0$ e fonte $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, tal problema tem uma única solução $w_0^f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Definiremos o operador da Fonte para Neumann com respeito a equação de Helmholtz como sendo:*

$$\begin{aligned} \Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ \Lambda_0[f](x) = \frac{\partial w_0^f}{\partial \nu_x}(x) &= \gamma_1[w_0^f](x), x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pelo Teorema Traço 1.2.4 tal operador é bem definido e linear.

Observação 2.3.1 *Se considerarmos problema (2.1) com dados Dirichlet $g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ e $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ cuja solução é dada por uma $w_g^f \in H^2(\Omega)$, podemos definir de forma geral o mapeamento da Fonte para Neumann com respeito a equação de Helmholtz:*

$$\begin{aligned} \Lambda_g : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ \Lambda_g[f](x) = \frac{\partial w_g^f}{\partial \nu_x}(x) &= \gamma_1[w_g^f](x), x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Note que esta situação mais geral nos conduz a outros funcionais:

- *Podemos definir um mapeamento Fonte - Dirichlet para Neumann. Atribuiremos a notação (FD-N).*

$$\begin{aligned} \Lambda[\bullet, \bullet] : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ [f, g] &\mapsto \Lambda[f, g] = \gamma_1[w_g^f] \end{aligned} \tag{2.13}$$

- *Restringindo tal funcional, obtemos o mapeamento de Dirichlet para Neumann.*

Atribuiremos a notação (D-N).

$$\begin{aligned} \Lambda[0,\bullet]: \{0\}\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ g \mapsto\ & \Lambda[0,g] \equiv \Lambda^0[g] = \gamma_1[w_g^0],\ e \end{aligned} \tag{2.14}$$

- *O mapeamento de Fonte para Neumann. Atribuiremos a notação (F-N).*

$$\begin{aligned} \Lambda[\bullet,0]: H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)\times \{0\} &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ f \mapsto\ & \Lambda[0,f] \equiv \Lambda_0[f] = \gamma_1[w_0^f]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Mostraremos a seguir que o mapeamento (F-N) forma um homeomorfismo entre $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$. Não é difícil perceber que no caso geral, tal operador (FD-N) não é injetivo. O fato é que o dado de Dirichlet na fronteira ser 0 *é uma peça chave da prova do Teorema 2.3.1.*

Utilzaremos o seguinte resultado na demonstração do proximo teorema:

Proposição 2.3.1 *Sejam $E; F$ espaços de Banach. Se $T: E\to F$ e uma aplicação linear limitada bijetiva, então a aplicação linear $T^{-1}: F\to E$ e contínua*

Prova Uma demonstração para o resultado pode ser encontradas em [20] capítulo (3).

Teorema 2.3.1 *Se Ω tem fronteira regular, então $\Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é um homeomorfismo.*

Prova:

- $\Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é contínua.

Sejam $f_n, f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$, com $n\in\mathbb{N}$. Suponha que $f_n \to f$ em $L^2(\Omega)$, isto é :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Sejam $\varphi_n = \Lambda_0(f_n)$ e $\varphi = \Lambda_0(f)$ onde Λ_0 é o mapeamento (F-N). Para cada n, podemos associar o problema de quarta ordem, da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (-\Delta-\kappa^2)w_n = f_n & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w_n = 0 & \text{em } \Gamma \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (\Delta^2-\kappa^4)w_n = 0 & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w_n = 0 & \text{em } \Gamma \\ \gamma_1 w_n = \varphi_n & \text{em } \Gamma \end{array} \right.$$

analogamente para f obtemos,

$$\begin{cases} (-\Delta - \kappa^2)w = f & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\Delta^2 - \kappa^4)w = 0 & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w = 0 & \text{em } \Gamma \\ \gamma_1 w = \varphi & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Sabemos que o problema de quarta ordem com dado regular é bem posto, portanto depende continuamente dos dados iniciais. Suponha assim que φ_n não converge para φ, portanto, a menos de uma subsequência, existem números positivos ϵ_0 e δ_0 tais que

$$\|\Lambda_0(f_n) - \varphi\| = \|\varphi_n - \varphi\| \geq \epsilon_0 \text{ e } \|w_n - w\| \geq \delta_0,$$

logo w_n não converge para w. Por outro lado, Sendo G a função de Green associada a equação de Helmholtz (1.2.3) temos que para cada n,

$$w_n(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_n(\mathbf{y}) dy \quad \text{e} \quad w(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dy$$

com $\mathbf{x} \in \Omega$. Portanto,

$$\begin{aligned} |w_n(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})|^2 &\leq \left(\int_\Omega |G(\mathbf{x}, \mathbf{y})||f_n(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})| dy \right)^2 \\ &\leq \left[\int_\Omega |G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 dy \right] \left[\int_\Omega |f_n(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})|^2 dy \right], \end{aligned}$$

logo

$$\|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}$$

Como G é quadrado integrável, segue que $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$ uma vez que por hipótese $\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, sendo isto é uma contradição. Desta forma devemos ter que φ_n converge para φ. Portanto Λ_0 é contínua.

- $\Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é injetiva.

Tome $f \in Ker(\Lambda_0)$, então $\Lambda_0[f] = \gamma_1[w_0^f] = 0$ é a derivada normal do problema (2.1) com dado de Dirichlet sendo zero em Γ. Por hipóteses, $f \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ e, consequentemente, $0 = (-\Delta + \kappa^2)f = (-\Delta + \kappa^2)(-\Delta - \kappa^2)w_0^f$. O problema de quarta ordem é expresso por

$$\begin{cases} (\Delta^2 - k^4)w_0^f = 0 & \text{em } \Omega \\ \gamma_0 w_0^f = 0 & \text{em } \Gamma \\ \gamma_1 w_0^f = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

tal sistema está bem definido e tem uma única solução $w_0^f = 0$. Então,

$$f = (-\Delta - \kappa^2)w_0^f = 0$$

. Como f é arbitrária, temos $Ker(\Lambda_0) = \{0\}$, logo a injetividade está provado.

- $\Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva.

Seja $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Tome w sendo a solução do problema de Neumann dado por,

$$\begin{cases} (-\Delta + \kappa^2)w = 0 & \text{em } \Omega \\ \gamma_1 w = \varphi & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

O problema acima é bem posto devido a regularidade do dado de Neumann. Assim fazendo $f = w$ obtemos $\Lambda_0[f] = \gamma_1 w = \varphi$. Portanto, Λ_0 é sobrejetora.

Resta provar apenas que:

- $\Lambda_0^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é contínua.

Na verdade, esta é uma consequência do Teorema da aplicação aberta 2.3.1 já que $\Lambda_0 : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é uma aplicação contínua linear bijectiva entre espaços de Banach.

$\square$

Definição 2.3.2 *Consideremos novamente o problema 2.1 com dado Dirichlet zero, isto é, $g = 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Tomaremos então $w_0^f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solução do mesmo. Definiremos a extensão do mapeamento de (F-N), com respeito a equação de Helmholtz como o operador*

$$\overline{\Lambda_0} : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$
$$\overline{\Lambda_0}[f](\mathbf{x}) = \frac{\partial w_0^f}{\partial \nu_x}(\mathbf{x}) = \gamma_1[w_0^f](x), \ \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{2.16}$$

Vale notar que esta extensão não é injetiva, portanto ao analisar as características do problema inverso, temos que o mesmo é mal posto.

Proposição 2.3.2 *Se $f \in H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$, então $\overline{\Lambda_0(f)} = 0$.*

Prova: Seja $f \in H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$, pelo Lema 2.2.2, $H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) = (-\Delta - \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$ deste modo, existe $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que,

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa^2 u = f & \text{em } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}.$$

Consideremos o problema (2.1), com a fonte descrita na hipótese e dado de Dirichlet zero em Γ. Podemos observar que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donde $\overline{\Lambda_0(f)} = \gamma_1 w \in H^{1/2}(\Gamma)$. Sendo G a função de Green associada a equação de Holmholtz, obtemos que

$$w(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(y) dy$$

Agora por hipótese, $-\Delta u - \kappa^2 u = f$ assim, fazendo uso da segunda identidade de Green, tem-se

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(y) dy \\ &= \int_\Omega G(\mathbf{x}, \mathbf{y})(-\Delta u(\mathbf{y}) - \kappa^2 u(\mathbf{y})) dy \\ &= \int_\Omega (\Delta_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \kappa^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) u(\mathbf{y}) dy \\ &= \int_\Omega \delta_x(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dy = u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

e portanto, $u = w$ em $H^2(\Omega)$ e pelo Teorema do Traço 1.2.4, segue que $\overline{\Lambda_0}(f) = \gamma_1 w = \gamma_1 u = 0$. O que conclui a proposição.

$\square$

Corolário 2.3.1 $\overline{\Lambda_0} : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ *é contínua.*

Isto segue da proposição 2.3.2 e do Teorema 2.3.1, uma vez que $\pi_1 : L^2(\Omega) \to H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é a projeção canônica e $\overline{\Lambda_0} = \Lambda_0 \circ \pi_1$.

$\square$

Observação 2.3.2 *Sendo assim, dada $f \in L^2(\Omega)$, existem únicas $f_1 \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ e $f_2 \in H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$ tal que $f = f_1 + f_2$, donde $\overline{\Lambda_0}(f) = \overline{\Lambda_0}(f_1) + \overline{\Lambda_0}(f_2) = \Lambda_0(f_1) + 0$, pela proposição 2.3.2. Este é de fato uma extensão de Λ_0, mais ainda $\overline{\Lambda_0} = \Lambda_0 \circ \pi_1$ donde podemos perceber que a sobrejetividade é preservada.*

Corolário 2.3.2 *O quociente de $L^2(\Omega)$ por $H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$ é uma cópia de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Prova. A prova é uma consequência da proposição 2.3.2 pois o $Ker(\overline{\Lambda_0}) = H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$ e pelo corolário 2.3.1 $\overline{\Lambda_0}$ é contínua, portanto segue o resultado.

$\square$

Observação 2.3.3 $\overline{\Lambda_0}(f) = \Lambda \circ \pi_1$

Corolário 2.3.3 *$Ker(\overline{\Lambda_0}) = H^{\perp}_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$.*

Seja X um espaço de Banach, definiremos o dual de X como sendo o conjunto

$$X^* := \{x^* : X \to \mathbb{R};\ x^* \text{ é limitado }\}$$

Sejam X e Y espaços de Banach, e $T : X \to Y$ um operador linear limitado, Definiremos o operador $T^* : Y^* \to X^*$ como sendo o único operador linear que satisfaz $T^*[y^*](\mathbf{x}) = y^*[T(\mathbf{x})]$. Mais informações sobre operadores adjuntos e suas propriedades, podem ser encontradas em [20] capítulo 3.

Observação 2.3.4 *Sabemos que, do teorema 2.3.1 que o operador $\overline{\Lambda_0}$ é limitada e sobrejetiva, então seu operador adjunto $\overline{\Lambda_0}^*$ de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ em $L^2(\Omega)$ está bem definido é contínuo e injetivo.*

Proposição 2.3.3 *Se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, então $H_{-\Delta-\kappa_1^2}(\Omega) \cap H_{-\Delta-\kappa_2^2}(\Omega) = \{0\}$.*

Prova. Suponha que $v \in H_{-\Delta-\kappa_1^2}(\Omega) \cap H_{-\Delta-\kappa_2^2}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} (-\Delta - \kappa_1^2)v = 0 \quad & \text{if } v \in H_{-\Delta-\kappa_1^2}(\Omega) \\ (-\Delta - \kappa_2^2)v = 0 \quad & \text{if } v \in H_{-\Delta-\kappa_2^2}(\Omega). \end{aligned}$$

e consequentemente, $v = 0$.

□

Observação 2.3.5 *Se substituirmos $\kappa \in \mathbb{R}$ por $i\kappa$ no problema (2.1) e usar o mesmo argumento já utilizado nas provas precedente, obteremos:*

- *(i) $L^2(\Omega) = H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) \oplus (-\Delta + \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$,*
- *(ii) $H^{\perp}_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) = (-\Delta + \kappa^2)[H_0^2(\Omega)]$,*
- *(iii) $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ é um subspaço fechado de $L^2(\Omega)$,*
- *(iv) $L^2(\Omega) = H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega) \oplus H^{\perp}_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$,*
- *(v) if $\kappa_1 \neq \kappa_2$, $H_{-\Delta-\kappa_1^2}(\Omega) \cap H_{-\Delta-\kappa_2^2}(\Omega) = \{0\}$.*

2.4 Representação integral

Definição 2.4.1 *Seja $G(x,\zeta)$ a função de Green referente ao problema (2.1) com dado de Dirichlet homogêneo na fronteira. Então definimos o operador solução:*

$$S : L^2(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \to H^1(\Omega), \quad [f,g] \mapsto u = S[f,g]$$

onde u é solução de (2.1), é dado por,

$$u(\mathbf{x}) = S[f,g](\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)G(\mathbf{x},\zeta)d\zeta + \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_\zeta}d\zeta \ , \ \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.17}$$

Este fato decorre da teoria clássica do potencial. Uma prova de que u a solução da equação não homogênea de Helmholtz com fonte f e dado de Dirichlet g é de fato dado desta forma, pode ser encontrado em, [22].

Observação 2.4.1 *Note que ao utilizarmos (2.17) podemos decompor o funcional solução na forma,*

$$u = S[f,g] := S[f,0] + S[0,g] : L^2(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^1(\Omega), \tag{2.18}$$

onde

$$S[f,0] : L^2(\Omega) \times \{0\} \to H^1(\Omega),$$

é a solução do problema auxiliar com fonte f e dado de Dirichlet homogêneo, e

$$S[0,g] : \{0\} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^1(\Omega),$$

é a solução do problema auxiliar com fonte zero e dado de Dirichlet g. Por simplicidade, fixe $f \in L^2(\Omega)$ ou $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ iremos denotar:

$$\begin{aligned} S^f &= S[f,\bullet] : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^1(\Omega), \\ S_g &= S[\bullet,g] : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega); \end{aligned} \tag{2.19}$$

tomando o traço normal de (2.17) obteremos,

$$\Lambda[f,g](\mathbf{x}) = \gamma_1 \circ S[f,g](\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x}d\zeta + \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta}d\sigma(\zeta) \tag{2.20}$$

para $\mathbf{x} \in \Gamma$, que é uma expressão explicita do mapeamento (FD-N).

Observação 2.4.2 *Note que*

$$S_0[f](\mathbf{x}) = S[f,0](x) = \int_\Omega f(\zeta)G(\mathbf{x},\zeta)d\zeta, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.21}$$

e

$$S^0[g](\mathbf{x}) = S[0,g](\mathbf{x}) = \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2.22}$$

Com esta decomposição, obteremos uma representação explicita para os operadores definidos por, (2.19)

1.

$$\Lambda[f,g](\mathbf{x}) = \gamma_1 \circ S[f,g](\mathbf{x}) =$$

$$\frac{\partial S[f,g]}{\partial \nu_x}(\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta + \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta), \tag{2.23}$$

com $\mathbf{x} \in \Gamma$.

2.

$$\Lambda^0[g](\mathbf{x}) = \Lambda[0,g](\mathbf{x}) = \gamma_1 \circ S[0,g](\mathbf{x}) = \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta) \ , \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.24}$$

é a representação explicita do mapeamento de (D-N);

3.

$$\overline{\Lambda_0}[f](\mathbf{x}) = \Lambda[f,0](\mathbf{x}) = \gamma_1 \circ S[f,0](\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.25}$$

é a representação explicita do mapeamento de (F-N).

Exemplo 2.4.1 *Considere* $d = 2$, $\Omega = D = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1\}$. *Segue do exemplo (1.2.1) que*

$$\frac{\partial G(\zeta,\mathbf{x})}{\partial \nu} = \frac{1}{2\pi} P_\kappa(\rho, \theta - \beta).$$

Desta forma o mapeamento (F-N) é explicitamente dado por:

$$f \mapsto F[f](\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho P_\kappa(\rho,\theta-\beta) f(\rho,\theta) d\rho d\theta \ \beta \in [0, 2\pi)$$

onde

$$P_\kappa(\rho,\theta-\beta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{I_{|n|}(\kappa\rho)}{I_{|n|}(\kappa)} e^{in(\beta-\theta)}$$

e $I_{|n|}$ *são as funções de Bessel modificadas de primeira espécie.*

Proposição 2.4.1 *Sejam* u_j, $j = 1, 2$ *duas soluções para o problema (2.1) com a mesma fonte* f *e dados de Dirichlet diferentes,* g_j, $j = 1, 2$. *Então*

- *(i)*
$$\Lambda^f[g_1] - \Lambda^0[g_1] = \Lambda^f[g_2] - \Lambda^0[g_2] \quad em \quad \Gamma,$$
isto é,
$$\Lambda^f - \Lambda^0 : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$
é constante, cujo valor funcional é independente do dado Dirichlet g e depende apenas da função fonte f;

- *(ii)*
$$\int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta = \Lambda^f[g_j](\mathbf{x}) - \Lambda^0[g_j](\mathbf{x})$$
para toda solução de (2.1) com dado de Dirichlet arbitrário com uma fonte fixa, isto é, a integral é a função dada pelo mapeamento relativo de Dirichlet para Neumann.

Prova: A igualdade

$$\int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta = \Lambda^f[g_1] - \Lambda^0[g_1] = \Lambda^f[g_2] - \Lambda^0[g_2]$$

em ambos os itens (i) e (ii) é uma consequência trivial das equações (2.23), (2.24) e (2.25).

□

Note que neste caso, a única informação relevante para a reconstrução da fonte é dada pela medida da derivada normal na fronteira Γ,

$$\gamma_1 u = \Lambda^f[g], \tag{2.26}$$

que corresponde a algum dado específico g, o qual podendo assumir sem perda de generalidade sendo zero, a rigor, porque estamos substituindo o problema original (2.3) pelo problema equivalente:

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa u = f \\ \gamma_0 u = 0 \\ \gamma_1 u = \phi = \varphi - \Lambda^0[g] \end{cases}$$

onde g é o dado de Dirichlet de (2.3) e Λ^0 é o mapeamento (D-N).

Definição 2.4.2 *Uma vez que o problema inverso de fonte com par de dados de Cauchy (g, φ) tenha solução. O mapeamento (F-N) admite a seguinte formulação:*

$$\overline{\Lambda_0}[f](\mathbf{x}) = (\Lambda^f - \Lambda^0)[g](\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial_{\nu_x}\partial_{\nu_\zeta}} d\sigma_\zeta \;;\; \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.27}$$

o que é observado da proposição 2.4.1. Por outro lado, se $f \in L^2(\Omega)$ segue de (2.25)

$$\overline{\Lambda_0}[f] = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial_{\nu_x}}d\zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

e portanto

$$\int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial_{\nu_x}}d\zeta = \varphi(\mathbf{x}) - \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial_{\nu_x}\partial\nu_\zeta}d\sigma_\zeta \tag{2.28}$$

Por uma questão de simplicidade vamos trocar $\overline{\Lambda_0}$ por F. A equação (2.28) passará a ser chamada de formulação de Green para o problema inverso de fonte assiciado a equação de Helmholtz.

Definição 2.4.3 *Uma vez que sabemos a formulação integral para F, podemos determinar a formulação integral para F^*. De fato,*

$$\langle F[f], \psi\rangle_{H^{\frac{1}{2}}\times H^{-\frac{1}{2}}} = \langle f, F^*[\psi]\rangle_{L^2\times L^2}$$

e para

$$F[f](\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial\nu_x}d\zeta, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

segue que,

$$F^*[\psi](\zeta) = \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial\nu_x}d\sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{2.29}$$

Definição 2.4.4 *Fixe o par de dados de Cauchy $(g, \varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Definimos o funcional de reciprocidade associado a equação de Helmholtz, sendo*

$$R : H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde R é dado por,

$$R_{(g,\varphi)}(v) = \int_\Gamma \left(g.\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\varphi\right)d\sigma \tag{2.30}$$

Considere agora o problema inverso (2.3) segue da segunda identidade de Green que para $f \in L^2(\Omega)$,

$$\int_\Gamma \left(g.\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\varphi\right)d\sigma = \int_\Omega fv dx \tag{2.31}$$

para toda $v \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$. A equação (2.31) é chamada de formulação variacional para o problema inverso de fonte associado a equação de Helmholtz. Tal igualdade é também chamada de relação de ortogonalidade, vide [15]

Note que o Teorema de Banach-Necas-Babuska [24] assegura a existência de uma solução neste caso.

O próximo resultado mostra que a solução encontrada pelo método variacional é equivalente a solução encontrada quando utilizamos as funções de Green.

Teorema 2.4.1 *Seja $(g, \varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ par de dados de Cauchy. Existe $f \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (2.28) se e somente se satisfaz (2.31)*

Prova. Seja $(g, \varphi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Suponha que exista $f \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (2.28) mais precisamente,

$$\int_\Omega f(\zeta) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x}\, d\zeta = \varphi(\mathbf{x}) - \int_\Gamma g(\zeta) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta}\, d\sigma(\zeta),$$

onde G é a função de Green associada ao operador de Helmholtz em Ω. Seja $v \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$, note que tal função pertence a $H^1(\Omega)$ e pelo Teorema do Traço 1.2.4, v admite uma extensão a $\overline{\Omega}$, com $v|_\Gamma \in H^{1/2}(\Omega)$. Temos então a seguinte representação integral para v,

$$v(\zeta) = \int_\Gamma v(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x}\, d\sigma(\mathbf{x}),\ \zeta \in \overline{\Omega},$$

tomando o traço normal de v em Γ obtemos,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_\zeta}(\zeta) = \int_\Gamma v(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta}\, d\sigma(\mathbf{x}),\ \zeta \in \Gamma.$$

Multiplicando a equação (2.28) por v e integrando em Γ devemos obter,

$$\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \left[\int_\Omega f(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(\mathbf{x}, \zeta) d\zeta\right] d\sigma(\mathbf{x}) = \int_\Gamma v(\mathbf{x}) \left[\varphi(\mathbf{x}) - \int_\Gamma g(\zeta) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta)\right] d\sigma(\mathbf{x})$$

$$= \int_\Gamma v(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) - \int_\Gamma v(\mathbf{x}) \left[\int_\Gamma g(\zeta) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta)\right] d\sigma(\mathbf{x}).$$

Agora aplicando o Teorema de Fubini segue

$$\int_\Omega f(\zeta) \overbrace{\left[\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x} d\sigma(\mathbf{x})\right]}^{v(\mathbf{x})} d\zeta =$$

$$\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \overbrace{\varphi(\mathbf{x})}^{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \nu_x}} d\sigma(\mathbf{x}) - \int_\Gamma g(\zeta) \overbrace{\left[\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\mathbf{x})\right]}^{\frac{\partial v(\zeta)}{\partial \nu_\zeta}} d\sigma(\zeta),$$

que implica

$$\int_\Omega f(\zeta) v(\zeta) d\zeta = \int_\Gamma \left(v(\zeta)\varphi(\zeta) - g(\zeta) \frac{\partial v(\zeta)}{\partial \nu_\zeta}\right) d\sigma(\zeta).$$

Pela arbitrariedade de $v \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ obteremos a formulação variacional (2.31).

Reciprocamente, suponha agora que exista $f \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (2.31), mais precisamente, para todo $v \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ vale,

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Gamma \left(\varphi(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu}\right) d\sigma(\mathbf{x}).$$

Seja $h \in H^{1/2}(\Omega)$, pelo Teorema 2.3.1 podemos tomar $v \in H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$ tal que, $\Lambda_0(v) = h = v|_\Gamma$, onde v admite a seguinte representação integral,

$$v(\mathbf{x}) = \int_\Gamma h(\zeta)\frac{\partial G(\zeta,\mathbf{x})}{\partial \nu_\zeta}\ d\sigma(\zeta)\ \forall\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \tag{2.32}$$

cuja a derivada normal é

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \nu_x} = \int_\Gamma v(\zeta)\frac{\partial^2 G(\zeta,\mathbf{x})}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta}\ d\sigma(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in \Gamma \tag{2.33}$$

substituindo (2.33) em (2.31) e aplicando o teorema de Fubini obtemos

$$\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta d\sigma(\mathbf{x}) =$$

$$\int_\Gamma v(\mathbf{x}) \left[\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta) - \int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta)\right] d\sigma(\mathbf{x}).$$

Note que:

$$\int_\Gamma g(\zeta)\frac{\partial^2 G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x \partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta) = \Lambda^0[g](\mathbf{x})\ ,\ \mathbf{x} \in \Gamma$$

onde Λ^0 é o mapeamento (D-N) e

$$\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_\zeta} d\sigma(\zeta) = u|_\Gamma(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\quad ,\mathbf{x} \in \Gamma$$

sendo $u = \Lambda_0^{-1}(\varphi)$ e Λ_0 é o mapeamento (F-N). Obtemos assim,

$$\int_\Gamma h(\mathbf{x}) \left[\int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x} d\zeta - \varphi(\mathbf{x}) + \Lambda^0[g](\mathbf{x})\right] d\sigma(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.34}$$

para todo $h \in H^{1/2}(\Gamma) \cong H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega)$.

Desta forma, podemos definir, o funcional linear $T : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(h) = \int_\Gamma h(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x}) \tag{2.35}$$

onde

$$\alpha(\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\zeta)\frac{\partial G(\mathbf{x},\zeta)}{\partial \nu_x}d\zeta - \varphi(\mathbf{x}) + \Lambda^0[g](\mathbf{x}) \ ; \ \mathbf{x} \in \Gamma,$$

por definição, $\alpha \in H^{-1/2}(\Gamma)$, sendo assim, fazendo as devidas identificações duais, temos que, T é contínuo, e por (2.34) identicamente nula. Portanto $\alpha(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \Gamma$, logo obtemos o resultado desejado.

□

Provamos assim que existe uma solução para equação (2.28) se e somente se existe uma solução para a equação (2.31). A primeira parte do teorema já era esperada e pode ser encontrada na literatura, por exemplo [19], com uma roupagem ligeiramente diferente. Contudo a reciproca é nova e mostra que a solução variacional do problema inverso de fonte da equação de Helmholtz, se preserva ao utilizarmos a função de Green ou uma soluçãos fundamental.

Capítulo 3

Unicidade e Estabilidade para o Problema Inverso de Reconstrução de Fontes Características

3.1 Introdução

A questão unicidade da solução do problema inverso de reconstrução de uma fonte característica desconhecida, a partir de leituras feitas na fronteira do domínio, permanece em aberto no caso dos problemas modelados pela equação de Poisson, . Um resultado clássico com respeito a questão da unicidade da reconstrução de fontes características assume que o objeto a ser reconstruído possui forma estrelada, e foi provado em 1938 por Novikov [14], e estendido para o caso convexo em uma direção por Isakov em [15]. O resultado provado por Isakov diz que esse tipo de fonte pode ser reconstruída a partir exclusivamente dos dados de Cauchy (isto é Dirichlet e Neumann) na fronteira do domínio. Martins provou em [25] que apenas com parte da informação na fronteira é possível reconstruir de forma aproximada uma fonte estrelada, via o método das soluções fundamentais. Badia-Duong provaram em [9] o caso onde tais fontes são formadas por monopolos (combinações lineares de distribuições da forma de delta de Dirac) ou dipolos (combinações lineares de distribuições da forma de derivadas de delta de Dirac). O caso planar, que possui uma grande gama de aplicações, vem sendo estudado através dos métodos de análise numérica. Para mais informações, consulte consultar, [16] e [18].

Na seção 3.2 deste capítulo assumiremos que o modelo é dado pela equação de Helmholtz modificada, no qual o operador de Laplace é perturbado por um termo de absorção. Apresentaremos então neste contexto um teorema de unicidade sob certas restrições a serem estabelecidas. Apresentaremos também um exemplo que ilustra a dificuldade do caso bidimensional.

As seções 3.3 e 3.4 em questão oferecem uma alternativa para o seguinte de fenômeno: Sendo $W \subset \Omega$, aberto de fecho compacto, sendo χ_W a função característica de W, é claro que $\chi_W \in L^2(\Omega)$ e que tal função nem sempre tem parte harmônica. Sendo assim, os teoremas de unicidade e estabilidade provados no capítulo anterior assim como os métodos desenvolvidos em [8] ou [10], não podem ser estabelecidos. Na seção 3.3 estabeleceremos uma relação de estabilidade entre os dados aferidos na fronteira e o objeto em questão procurado. Na seção 3.4, estabelecemos um método para reconstrução da fonte desejada, mostramos que o método é consistente com os resultados de estabilidade obtidos na seção 3.3 e com o caso particular de conjuntos estrelados e para tal, fazemos uso do Teorema de Novikov,

Teorema 3.1.1 *(Teorema de Novikov) Suponha*

(i) D_j um aberto estrelado com respeito ao centro massa ou

(ii) D_j convexo com respeito a x_n

Se $u_1 = u_2$ (ou $\nabla u_1 = \nabla u_2$) em $\partial\Omega$ então $D_1 = D_2$.

para uma prova deste resultado, consulte o capítulo (4) de [15].

A vantagem do método que desenvolvemos é que resolvemos o problema apenas uma vez em um quadrado de referência, e depois transferimos os resultados para os locais desejados via translações e homotetias. Apesar do método ser matemáticamente simples, as dificuldades de implementação computacional ainda são inúmeras.

3.2 Unicidade

Nesta seção investigamos a unicidade na reconstrução de fontes de características no modelo de equação modificada Helmholtz. Os Teoremas a seguir serão de vital importância na demonstração do Teorema 3.2.2

Definição 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$. Diremos que $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ satisfaz a* **condição da esfera interior** *se existirem $\mathbf{x} \in \Omega$ e $r > 0$ tal que:*

i $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathbf{x}\| < r\} =: B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega,$

ii $\mathbf{x}_0 \in \partial B(x, r).$

Diremos assim que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a **condição da esfera interior** *se para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\mathbf{x}$ satisfaz (i) e (ii)*

Lema 3.2.1 *Seja L um operador uniformemente elíptico.*
Caso 1. $c = 0$ *e* $Lu \geq 0$ *em* Ω.
Caso 2. $c \leq 0$, $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* $\frac{c}{\lambda}$ *limitado.*
Se $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

i. *u é contínua em* $\mathbf{x}_0$;

ii. $u(\mathbf{x}_0) > u(\mathbf{x})$ *para todo* $x \in \Omega$;

iii. $\mathbf{x}_0$ *satisfaz a condição da esfera interior,*

então
Caso 1. *a derivada normal exterior de u em* $\mathbf{x}_0$ *existe e satisfaz*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x})\,|_{x_0} > 0 \; .$$

Caso 2. *a mesma conclusão é fornecida desde que* $u(\mathbf{x}_0) \geq 0$ *e se* $u(\mathbf{x}_0) = 0$ *A conclusão é a mesma, independentemente do sinal de c.*

Definição 3.2.2 *A rigor, diremos que* $A \subset \mathbb{R}^d$ *é conexo se A é conexo por caminhos, isto é: para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ *existe um caminho* $\alpha : [0,1] \to A$ *contínuo tal que* $\alpha(0) = \mathbf{x}$ *e* $\alpha(1) = \mathbf{y}$.

Teorema 3.2.1 *Seja L um Operador elíptico em* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *onde* Ω *é um aberto conexo e limitado. Suponha que*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \quad , c = 0 \in \Omega$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. *Então*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega} u \leq \sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u \quad (\inf_{\mathbf{x}\in\Omega} u \geq \inf_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u).$$

Se $Lu = 0$ *em* Ω, *então*

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega} u = \sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u.$$

Prova: Uma demonstração para os resultados precedentes podem ser encontradas no capítulo (2) de [26] .

Teorema 3.2.2 *Sejam* χ_{ω_1}, χ_{ω_2} *funções características, onde* ω_1 , $\omega_2 \subset \Omega$ *são abertos conexos com fronteira de classe* C^2 *e* $\omega_1 \backslash \omega_2$, $\omega_2 \backslash \omega_1$, $\omega_1 \cap \omega_2$ *conexos, considerando os problemas diretos (2.1) com fontes* χ_{ω_1}, χ_{ω_2} *respectivamente e com os mesmos dados de Cauchy em* Γ, *então* $\omega_1 = \omega_2$.

Prova: Suponha $\omega_1 \neq \omega_2$. Sejam u_1 e u_2 soluções para o problema (2.1) com fontes χ_{ω_1}, χ_{ω_2} tal que ambas gerem os mesmos dados de Cauchy em Γ. Tome, $w = u_1 - u_2$. Note que w satisfaz,

$$\begin{cases} -\Delta w + \kappa^2 w = & (\chi_{\omega_1} - \chi_{\omega_2}) = F \quad \Omega \\ w = 0 & \qquad\qquad\qquad\quad \Gamma \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \qquad\qquad\qquad\quad \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

onde, $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, a qual é a única solução de (2.1) com $g = 0$. Podemos notar que,

$$F = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in \Omega \backslash (\omega_1 \cup \omega_2) \ ; \\ 1 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in \omega_1 \backslash \omega_2 \ ; \\ -1 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in \omega_2 \backslash \omega_1 ; \\ 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in \omega_1 \cap \omega_2 . \end{cases}$$

Pelo Teorema de Homegren aplicado a região $\Omega \backslash (\omega_1 \cup \omega_2)$, temos que se

$$(w, \frac{\partial w}{\partial \nu}) = (0, 0) \ \text{ em } \partial\Omega$$

então,

$$(w, \frac{\partial w}{\partial \nu}) = (0, 0) \ \text{ em } (\partial\omega_2 \backslash \omega_1) \cup (\partial\omega_1 \backslash \omega_2). \tag{3.2}$$

Vamos analisar as regiões separadamente:

Região $\omega_2 \backslash \omega_1$

$$\begin{cases} -\Delta w + \kappa^2 w = -1 < 0 & \omega_2 \backslash \omega_1 ; \\ w = 0 & \partial\omega_2 \backslash \omega_1 ; \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \partial\omega_2 \backslash \omega_1 . \end{cases} . \tag{3.3}$$

Agora aplicando o Princípio do Máximo, 3.2.1, a região $\omega_2 \backslash \omega_1$, , no sistema (3.3) obtemos duas possibilidades,

- $$\begin{gathered} \exists \ \mathbf{x}_1 \in \partial\omega_1 \cap \omega_2 \ , \ w(\mathbf{x}_1) > 0 \\ \text{tal que } w(\mathbf{x}_1) \geq w(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \omega_1 \backslash \omega_2 \end{gathered} \tag{3.4}$$

  ou

- $$w(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \partial(\omega_2 \backslash \omega_1)^\circ \tag{3.5}$$

Note que a condição (3.5) não pode acontecer. Suponha que (3.5) seja verdadeira De fato, tome $\mathbf{x}_0 \in \partial(\omega_2 \backslash \omega_1)$ em particular, podemos tomar $x_0 \in \partial(\omega_1) \backslash \omega_2$, e por 3.2

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0.$$

Por outro lado, x_0 e w estão sobre as hipóteses do Lema 3.2.1, e portanto

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} > 0,$$

o que é uma contradição, consequentemente, (3.5) não pode acontecer.

Note ainda que $w(\mathbf{x})$ não é constante em $(\omega_1 \backslash \omega_2)^o$. De fato, pois caso seja, por continuidade, devemos ter $w(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \omega_1 \backslash \omega_2$, o que implicaria a a afirmação 1, a qual não pode acontecer. Portanto $w(\mathbf{x})$ não é constante em $(\omega_1 \backslash \omega_2)^o$.

Sendo assim a única possibilidade que podemos ter para a região $\omega_1 \backslash \omega_2$ é,

$$\begin{gathered} \exists\ \mathbf{x}_1 \in \partial\omega_1 \cap \omega_2\ ,\ w(\mathbf{x}_1) > 0 \\ \text{tal que } w(\mathbf{x}_1) \geq w(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \omega_1 \backslash \omega_2 \end{gathered}$$

Note que ω_2 é aberto, e satisfaz a condição interior da esfera em $\mathbf{x}_1$, , com respeito a $\omega_1 \backslash \omega_2$, então o Lema 3.2.1 e a condição (3.4) estabelecem que a derivada normal de w no ponto $\mathbf{x}_1$ que pertence a fronteira de $\omega_1 \backslash \omega_2$, é positivo isto é,

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}_1)}{\partial \nu} > 0.$$

Região $\omega_1 \backslash \omega_2$. Basta proceder da mesma forma que na região $\omega_2 \backslash \omega_1$. Obtendo então $\mathbf{x}_2 \in \partial\omega_1 \cap \omega_2$ tal que

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}_2)}{\partial \nu} > 0.$$

Região $\omega_1 \cap \omega_2$.

Desta forma,

$$-\Delta w + \kappa^2 w = 0 \text{ em } \ \omega_1 \cap \omega_2 \tag{3.6}$$

e segue do Teorema 3.2.1 que,

$$\exists\ \mathbf{x}_1'\ \mathbf{x}_2' \in \partial(\omega_1 \cap \omega_2) \text{ tal que}$$

$$\forall\ \mathbf{x} \in \omega_1 \cap \omega_2\ ,\ \ w(\mathbf{x}_1') \geq w(\mathbf{x}) \geq w(\mathbf{x}_2'). \tag{3.7}$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos observar que $w(\mathbf{x})$ não é constante em $\omega_1 \cap \omega_2$

Suponha que $w(\mathbf{x})$ é constante em $\omega_1 \cap \omega_2$. por continuidade e analisando as interseções da fronteira temos pela compatibilidade que,

$$\forall\ \mathbf{x} \in \partial(\omega_1 \cap \omega_2)\ ,\ w(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.8}$$

e por continuidade temos que $w(\mathbf{x}_1) = 0$ e $w(\mathbf{x}_2) = 0$, mas isto contradiz (3.4), pois $\partial\omega_2 \cap \omega_1 \subset \partial(\omega_1 \cap \omega_2)$. Então $w(\mathbf{x})$ não é constante em $\omega_1 \cap \omega_2$. A gora, pelo

Teorema 3.2.1 vejamos que:

$$\sup_{\mathbf{x}\in\omega_1\cap\omega_2} w(x) = \sup_{x\in\partial(\omega_1\cap\omega_2)} w(x) = \begin{array}{c} \sup_{x\in\partial\omega_1\cap\omega_2} w(x) = I \\ \text{ou} \\ \sup_{x\in\omega_1\cap\partial\omega_2} w(x) = II \end{array}$$

Suponha sem perda de generalidade II, então

$$\sup_{\mathbf{x}\in\omega_1\cap\omega_2} w(x) = \sup_{x\in\omega_1\cap\partial\omega_2} w(x) = \sup_{\omega_1\backslash\omega_2} w(x)$$

por (3.4), portanto, $w(\mathbf{x}_1) = w(\mathbf{x}_1')$.

Note daí, $\mathbf{x}_1$ satisfaz as condições do Lema 3.2.1 para a região $\omega_1 \cap \partial\omega_2$ neste caso

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_1) > 0.$$

.

Por outro lado, pelo Lema 3.2.1 aplicado a região $\omega_1\backslash\omega_2$, segue-se que a derivada normal exterior de w em x_1 é positiva e, consequentemente, a derivada normal interior é negativa. Voltaremos a aplicar o Lema 3.2.1 para a região $\omega_1 \cap \partial\omega_2$, obtemos que a derivada normal exterior de w em x_1 é positive. A normal interior do campo solução w na região $\omega_1 \cap \partial\omega_2$ é a normal exterior do campo solução w para região $\omega_1\backslash\omega_2$ obtemos assim uma contradição. Consequentemente $\omega_1 = \omega_2$.

□

Exemplo 3.2.1 *Seja $W \subset D = \{\mathbf{x};\ \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$ um aberto estrelado com respeito a origem. Tome*

$$f(\mathbf{x}) = \chi_W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & se\ \mathbf{x} \in W \\ 0 & se\ \mathbf{x} \notin W. \end{cases}$$

A rigor, podemos parametrizar W da forma, $\mathbf{x} = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e r é uma função contínua. Sendo assim,

$$F[\chi_W](\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} \rho P_\kappa(\rho, \theta-\beta)d\rho d\theta \ \beta \in [0, 2\pi) \tag{3.9}$$

Neste caso o operador (F-N) depende apenas de $r(\theta)$. Note que, a menos de algumas singularidades,

$$\begin{aligned} F[\chi_W](\beta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho\frac{I_{|n|}(\rho\kappa)}{I_{|n|}(\kappa)} e^{in(\beta-theta)} d\rho d\theta \\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r(\theta)} \rho\frac{I_{|n|}(\rho\kappa)}{I_{|n|}(\kappa)} d\rho\right) e^{-in\theta}d\theta\right] e^{in\beta} \end{aligned}$$

Definimos assim,

$$\mathcal{F}[r](\theta) = \frac{1}{I_{|n|}(\kappa)} \int_0^{r(\theta)} \rho I_{|n|}(\rho\kappa) d\rho. \tag{3.10}$$

Proposição 3.2.1 *Seja $r \in H^1(0, 2\pi)$.*

a *Se $0 \leq r(\theta) \leq \alpha < 1$, então $\mathcal{F}[r] \in C^\infty(0, 2\pi)$*

b *Se existe algum $\theta \in (0, 2\pi)$, tal que $r(\theta) = 1$, então $\mathcal{F}[r] \in H^l(0, 2\pi)$ com, $0 < l < 1/2$*

Prova *Segue da proposição* **??**, *que se $0 \leq r(\theta) \leq \alpha < 1$, então*

$$\frac{I_{|n|}(\rho\kappa)}{I_{|n|}(\kappa)} \leq \rho^{|n|},$$

logo, $\mathcal{F}[r]$ não possui singularidades, e mais,

$$|r(\theta)| \leq \frac{[r(\theta)]^{|n|+2}}{|n|+2}$$

assim

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}[r]\|_{H^l(0,2\pi)} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^l |\widehat{\mathcal{F}[r]}(n)|^2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^l \left| \int_0^{2\pi} \mathcal{F}[r](\theta) e^{-in\theta} d\theta \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^l \left(\int_0^{2\pi} \frac{[r(\theta)]^{|n|+2}}{|n|+2} d\theta \right)^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1+n^2)^l}{(|n|+2)^2} \alpha^{2|n|+4}
\end{aligned}$$

Como α é menor que 1, segue pelo teste da raiz, que a série,

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1+n^2)^l}{(|n|+2)^2} \alpha^{2|n|+4}$$

converge, para todo l, portanto $r \in C^\infty(0, 2\pi)$. O item (b) segue do fato que a série

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1+n^2)^l}{(|n|+2)^2}$$

converge apenas para valores de $0 < l < 1/2$

$\square$

Observação 3.2.1 *Pela proposição, 2.4.1 podemos supor que o problema inverso (2.3) possui dado de Dirichlet nulo, segue então da formulação variacional, representado pela equação (2.31), que se* $v \in H_{-\Delta+\kappa}(D)$ *e* $\varphi \in H^{1/2}$*, então*

$$\int_D v(\mathbf{x})\chi_W(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\partial D} v(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{x})$$

Como o núcleo de Helmholtz (1.15) pertence a $H_{-\Delta+\kappa}(D)$*, por construção, passando as coordenadas polares, obter-se-á,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r(\theta)} \rho P(\rho, \beta-\theta)d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{z\in\mathbb{Z}}\varphi(\theta)e^{in(\beta-\theta)}d\theta \tag{3.11}$$

por sua vez, Fixe $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\varphi(\theta)e^{in(\beta-\theta)}d\theta &= \\ \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right)e^{in\beta} &= \\ \sum_{n=-N}^{N}\widehat{\varphi}(n)e^{in\beta}&.\end{aligned}$$

Sabemos em particular que $\varphi \in L^2(0, 2\pi)$*, segue então do Teorema de Carleson [13], também conhecido como conjectura de Lusin, que*

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(n)e^{in\beta} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\varphi(\theta)e^{in(\beta-\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)}\rho P(\rho, \beta-\theta)d\rho d\theta,\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)}\rho P(\rho, \beta-\theta)d\rho d\theta = \varphi(\beta), \tag{3.12}$$

em particular, $F[\chi_W](\beta) = \varphi(\beta)$*. De forma análoga ao que foi feito acima, podemos provar que, se* $r \in H^s(0, 2\pi)$*,* $s > 0$ *então* $\mathcal{F}[r](\beta) = F[\chi_W](\beta)$ *mais precisamente,*

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{I_{|n|}(\kappa)}\int_0^{r(\beta)}\rho I_{|n|}(\rho\kappa)d\rho. \tag{3.13}$$

Proposição 3.2.2 *Seja* $\mathcal{H} := \{r \in L^2(0,2\pi);\ 0 \leq r \leq \alpha < 1\}$

$$\mathcal{F} : \mathcal{H} \to H^l(0,2\pi)$$

é localmente Lipschitz.

Seja $r \in \mathcal{H}$. *Tome* $N(r)$ *uma vizinhança de* r *em* $\mathcal{H}$. *Sejam* $r_1, r_2 \in N(r)$. *Fixe* $\theta \in [0,2\pi]$, *suponha ainda que* $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[r_1](\theta) - \mathcal{F}[r_2](\theta) &= \int_0^{r_1(\theta)} \rho \frac{I_{|n|(\rho\kappa)}}{I_{|n|(\kappa)}} d\rho - \int_0^{r_2(\theta)} \rho \frac{I_{|n|(\rho\kappa)}}{I_{|n|(\kappa)}} d\rho \\
&= \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \rho \frac{I_{|n|(\rho\kappa)}}{I_{|n|(\kappa)}} d\rho \\
&\leq \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \rho^{|n|+1} d\rho \\
&= \frac{r_1^{|n|+1}(\theta) - r_2^{|n|+1}(\theta)}{|n|+2} \\
&\leq [r_1(\theta) - r_2(\theta)] \frac{|n|+1}{|n|+2} \alpha^{|n|+1} \\
&\leq [r_1(\theta) - r_2(\theta)] \alpha^{|n|+1}.
\end{aligned}$$

Caso $r_1(\theta) \geq r_2(\theta)$, *temos a mesma desigualdade com a troca de* 1 *por* 2, *sendo assim, para todo* $\theta \in (0,2\pi)$

$$|\mathcal{F}[r_1](\theta) - \mathcal{F}[r_2](\theta)| \leq |r_1(\theta) - r_2(\theta)| \alpha^{|n|+1} \tag{3.14}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{F}[r_1]}(n) - \widehat{\mathcal{F}[r_2]}(n)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (\mathcal{F}[r_1](\theta) - \mathcal{F}[r_1](\theta)) e^{-in\theta} d\theta \right|^2 \\
&\leq \alpha^{|n|+1} \int_0^{2\pi} |r_1(\theta) - r_2(\theta)|^{1/2} d\theta \\
(1+n^2)^l |\widehat{\mathcal{F}[r_1]}(n) - \widehat{\mathcal{F}[r_2]}(n)|^2 &\leq (1+n^2)^l \alpha^{|n|+1} \int_0^{2\pi} |r_1(\theta) - r_2(\theta)|^{1/2} d\theta.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|\mathcal{F}[r_1] - \mathcal{F}[r_2]\|_{H^l(0,2\pi)} \leq C_0 \|r_1 - r_2\|_{L^2(0,2\pi)}. \tag{3.15}$$

e

$$C_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^l \alpha^{|n|+1}$$

□

3.3 Estabilidade

Daqui por diante estaremos supondo $\kappa = 0$. Mostraremos nesta seção que o método o qual iremos apresentar na parte final deste capítulo, para reconstrução de uma fonte característica com certa especificidade é consistente, no sentido que dados na fronteira que possuem comportamento semelhante são gerados por fontes de massa semelhantes, posicionadas em lugares semelhantes.

Prova-se em [8] que o dado de Dirichlet sobre fronteira Γ não nos fornece informações adicionais para a resolução do problema inverso, este resultado é também uma consequência da proposição 2.4.1, assim sem perda de generalidade, podemos considerar $g \equiv 0$. Desta forma as equações integrais (2.28) e (2.31) podem ser reescritas:

$$\int_{\Omega} fvdV = \int_{\Gamma} -v\varphi d\Gamma \tag{3.16}$$

e

$$\int_{\Omega} f(\xi)\frac{\partial G(\mathbf{x},\xi)}{\partial \nu_{\mathbf{x}}}dV = \varphi(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{3.17}$$

a rigor em todo o capítulo, quando estivermos falando da relação de ortogonalidade, estaremos sempre nos referindo a (3.16) e (3.17) .

A próxima definição "apresenta"o mapeamento Fonte para Neumann 2.3.1 no sentido das funções características.

Definição 3.3.1 *Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel definida sobre Ω e*

$$\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{A} \ ; \ \Delta u = \chi_U, \ \textit{adimite solução } u \in H^1(\Omega)\}.$$

Definimos

$$\Psi : \mathcal{U} \to H^{-1/2}(\Gamma)$$

como sendo:

$$\Psi(U) = \phi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \ \ \forall \ U \in \mathcal{U} \tag{3.18}$$

onde u é solução do problema direto associado,

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_U \ ; & \Omega \\ u = 0 \ ; & \Gamma \end{cases}.$$

Definição 3.3.2 *Sejam μ e λ medidas definidas em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Suponha que μ seja positiva e λ complexa. Então λ é absolutamente contínua com respeito a μ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ se $\mu(E) < \delta$, então $|\lambda(E)| < \epsilon$*

Observação 3.3.1 *Note que, dados W_1, $W_2 \subset \Omega$. Considere o problema inverso de fonte (2.3), com dados de Dirichlet zero e dado de Neumann φ_1, $\varphi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma)$*

respectivamente. Então existe $K > 0$ constante, tal que

$$|\mu(W_1) - \mu(W_2)| \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{3.19}$$

onde μ é a medida de Lebesgue usual.

Basta notar que,

$$\begin{aligned} |\mu(W_1) - \mu(W_2)| &= \left| \int_{W_1} 1dV - \int_{W_2} 1dV \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma} v^*\varphi_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} v^*\varphi_2 d\Gamma \right| \\ &\leq \|v^*\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

onde,

$$v^*(\mathbf{x}) = \Lambda_0(1) = \Psi(\Omega)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y})dV(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Observação 3.3.2 *Sejam $\mathcal{U}$ e Ψ como na definição 3.3.1. Então, $\mu(U) = 0$ se e somente se $\Psi(U) = 0$.*

A demonstração desta observação segue direto da relação de ortogonalidade (3.16).

Os próximos resultados dão uma ideia de continuidade para a relação em questão.

Proposição 3.3.1 *Sejam $W_1,\ W_2 \in \mathcal{U}$ e $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_{12},\ \varphi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tais que,*

$$\Psi(W_1) = \varphi_1, \quad \Psi(W_2) = \varphi_2, \quad \Psi(W_1 \backslash W_2) = \varphi_{12} \quad \Psi(W_2 \backslash W_1) = \varphi_{21}.$$

Então

1.
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{12} - \varphi_{21}. \tag{3.20}$$

2. *Existe $K > 0$, tal que*
$$\mu(W_1 \backslash W_2) \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + K\|\varphi_{21}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{3.21}$$

Prova: Sejam $W_1,\ W_2 \in \mathcal{U}$ e $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_{12},\ \varphi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tais que,

$$\Psi(W_1) = \varphi_1, \quad \Psi(W_2) = \varphi_2, \quad \Psi(W_1 \backslash W_2) = \varphi_{12} \quad \Psi(W_2 \backslash W_1) = \varphi_{21}.$$

Segue da relação de ortogonalidade (3.16) as equações,

$$\int_{W_1} vdV - \int_{W_2} vdV = \int_{\Gamma} (\varphi_1 - \varphi_2)vd\Gamma \ , \ \forall \ v \in H_{\Delta}(\Omega) \cong H^{1/2}(\Gamma) \tag{3.22}$$

$$\int_{W_1\backslash W_2} vdV - \int_{W_2\backslash W_1} vdV = \int_\Gamma (\varphi_{12}-\varphi_{21})vd\Gamma \ , \ \forall \ v \in H_\Delta(\Omega) \cong H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.23)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{W_1} vdV - \int_{W_2} vdV &= \int_{W_1\backslash W_2} vdV + \int_{W_1\cap W_2} vdV - \int_{W_1\backslash W_2} vdV - \int_{W_2\cap W_1} vdV \\
&= \int_{W_1\backslash W_2} vdV - \int_{W_2\backslash W_1} vdV
\end{aligned}$$

para todo $v \in H_\Delta(\Omega)$. Segue então, das equações (3.22) e (3.23) que,

$$\int_\Gamma (\varphi_1-\varphi_2)vd\Gamma = \int_\Gamma (\varphi_{12}-\varphi_{21})vd\Gamma, \ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$$

passando a forma dual,

$$\langle \varphi_1-\varphi_2, v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle \varphi_{12}-\varphi_{21}, v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} \,,$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Portanto a igualdade (3.20)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{12} - \varphi_{21}.$$

está verificada.

Tome $v^* \in H^{1/2}(\Gamma)$, tal que

$$v^*(\mathbf{x}) = \Lambda_0(1) = \Psi(\Omega)(\mathbf{x}) = \int_\Omega \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(\mathbf{x}-\mathbf{y})dV(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

fazendo uso novamente da representação dual da relação de ortogonalidade, (3.16), e da igualdade (3.20) obtemos

$$\begin{aligned}
\mu(W_1\backslash W_2) &= \left| \int_{W_1\backslash W_2} 1dV \right| \\
&= \left| \int_\Gamma v^*\varphi_{12} d\Gamma \right| \\
&\leq \int_\Gamma |v^*|(|\varphi_2-\varphi_1| + |\varphi_{21}|)d\Gamma \\
&\leq K\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\varphi_{21}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right),
\end{aligned}$$

assim

$$\mu(W_1\backslash W_2) \leq K\left(\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\varphi_{21}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right),$$

onde

$$K = \|v^*\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

$\Box$.

Corolário 3.3.1 *Sejam* $W_1,\ W_2 \in \mathcal{U}$ *e* $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_{12},\ \varphi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *tais que,*

$$\Psi(W_1) = \varphi_1, \quad \Psi(W_2) = \varphi_2, \quad \Psi(W_1 \backslash W_2) = \varphi_{12} \quad \Psi(W_2 \backslash W_1) = \varphi_{21}.$$

Se $W_2 \subset W_1$ *então,*

1.

$$\mu(W_1 \backslash W_2) \leq K\left(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right) \tag{3.24}$$

2.

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Prova: A prova deste resultado é uma combinação direta da observação 3.3.2 e da proposição 3.3.1

Definição 3.3.3 *Sejam* $W, W_n \subset \Omega$ *com* $n \in \mathbb{N}$. *Diremos que a sequência de conjuntos* $\{W_n\}$ *converge para* W, *se*

1.

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W \backslash W_n) = 0$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W_n \backslash W) = 0$$

Proposição 3.3.2 *Sejam* $\{W_n\} \subset \mathcal{U}$ *e* $\{\varphi_n\} \subset H^{-1/2}(\Gamma)$, *tais que* $\Psi(W_n) = \varphi_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\mu(W_n) \to 0$ *se e somente se,* $\{\varphi_n\}$ *converge fracamente para zero em* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Prova: Sejam $\{W_n\} \subset \mathcal{U}$ e $\{\varphi_n\} \in H^{-1/2}(\Gamma)$, tais que $\Psi(W_n) = \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixe $v \in H_\Delta(\Omega)$. Por hipótese $\mu(W_n) \to 0$ se $n \to \infty$. Por sua vez,

$$\left|\int_{W_n} v\right| \leq \int_{W_n} |v| \leq \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} |v(\mathbf{x})| \mu(W_n),$$

donde obtemos que para cada $v \in\ H_\Delta(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_n} v = 0. \tag{3.25}$$

Aplicando a relação de ortogonalidade (3.16), a cada W_n e φ_n, é visto que

$$\int_{W_n} vdV = \int_\Gamma \varphi_n v d\Gamma$$

para cada $v \in H_\Delta(\Omega) \cong H^{1/2}(\Gamma)$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \varphi_n v d\Gamma = 0.$$

Pela arbitrariedade de $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ seque que $\{\varphi_n\}$ converge fracamente para zero em $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Reciprocamente, suponha que $\{\varphi_n\}$ converge fracamente para zero em $H^{-1/2}(\Gamma)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \varphi_n v d\Gamma = 0.$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma) \cong H_\Delta(\Omega)$. Segue novamente da relação de ortogonalidade (3.16) que,

$$\int_{W_n} vdV = \int_\Gamma \varphi_n v d\Gamma,\ n \in \mathbb{N}$$

Assim escolhendo $1 \in H_\Delta(\Omega)$ e lembrando que neste caso o elemento correspondente em $H^{-1/2}(\Gamma)$ é dado por $v* = \Lambda_0(1) = \Psi(\Omega)$, obtemos então,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{W_n} 1dV = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v^* \varphi_n v d\Gamma = 0.$$

por hipótese. Concluindo assim a proposição.

$\square$.

Corolário 3.3.2 *Sejam $W_0,\ W_n \subset \mathcal{U}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tais que $\Psi(W_0) = \varphi_0$, $\Psi(W_n) = \varphi_n$, $\Psi(W_0 \backslash W_n) = \varphi_{0n}$ e $\Psi(W_n \backslash W_0) = \varphi_{n0}$. Se W_n converge para W, então $\{\varphi_n\}$ converge fracamente para φ_0 em $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Prova: Sejam $W_0,\ W_n \in \Omega$ com $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tais que

$$\Psi(W_0) = \varphi_0,\ \Psi(W_n) = \varphi_n,\ \Psi(W_0 \backslash W_n) = \varphi_{0n} \text{ e } \Psi(W_n \backslash W_0) = \varphi_{n0}.$$

Suponha

$$\mu(W_0 \backslash W_n) \to 0 \text{ e } \mu(W_n \backslash W_0) \to 0$$

quando $n \to \infty$. Então pela proposição 3.3.2 obtemos que $\{\varphi_{0n}\}$ e $\{\varphi_{n0}\}$ convergem fracamente para zero em $H^{-1/2}(\Gamma)$. Segue da proposição 3.3.1, que para cada n,

$$\varphi_{0n} - \varphi_{n0} = \varphi_0 - \varphi_n.$$

Logo $\{\varphi_0 - \varphi_n\}$ converge fracamente para zero em $H^{-1/2}(\Gamma)$. O que conclui o corolário.

$\square$.

A estabilidade do problema inverso de reconstrução de fonte característica, reside exatamente na recíproca do corolário 3.3.2, a recíproca no caso geral em que W é um aberto conexo qualquer é falsa, vide [15]. O próximo teorema nos dá uma dimensão da instabilidade na reconstrução de fontes características no problema de Poisson.

Teorema 3.3.1 *Sejam* $W_0,\ W_n \subset \mathcal{U}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *tais que*

(1) $\Psi(W_0) = \varphi_0$, $\Psi(W_n) = \varphi_n$, $\Psi(W_0 \backslash W_n) = \varphi_{0n}$ $\Psi(W_n \backslash W_0) = \varphi_{n0}$.

(2) $\{\varphi_n\}$ *converge fracamente para* φ_0 *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$

então, existem,

(1) $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$

(2) a menos de uma subsequência, $\{\varphi_{0n}\}$ *e* $\{\varphi_{n0}\}$ *convergem fracamente para* φ *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W_0 \backslash W_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(W_n \backslash W_0) = \int_\Gamma v^* \varphi d\Gamma \tag{3.26}$$

onde $v^* = \Lambda_0(1)$.

Prova: Sejam $W_0,\ W_n \in \mathcal{U}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tais que

$$\Psi(W_0) = \varphi_0,\ \Psi(W_n) = \varphi_n,\ \Psi(W_0 \backslash W_n) = \varphi_{0n} \text{ e } \Psi(W_n \backslash W_0) = \varphi_{n0}.$$

Suponha que $\{\varphi_n\}$ converge fracacamente para φ_0 em $H^{-1/2}(\Gamma)$, isto é, para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v\varphi_n d\Gamma = \int_\Gamma v\varphi_0 d\Gamma.$$

Afirmaremos $\{\varphi_{n0}\}$ e $\{\varphi_{0n}\}$ são limitadas.

De fato, considere a sequência de operadores lineares $\{T_{n0}\} \subset [H^{1/2}(\Gamma)]^* \cong H^{-1/2}(\Gamma)$ definidos da seguinte forma,

$$T_{n0}(v) \int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma.$$

então fixado $v \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned}
|T_{n0}(v)| &= \left|\int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma\right| \\
&= \left|\int_{W_0\setminus W_n} \Lambda_0^{-1}(v) dV\right| \\
&\leq \int_{W_0\setminus W_n} |\Lambda_0^{-1}(v)| dV \\
&\leq \int_\Omega |\Lambda_0^{-1}(v)| dV \\
&\leq \sqrt{\mu(\Omega)}\|\Lambda_0^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{\mu(\Omega)}\|\Lambda_0^{-1}\|\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

onde Λ_0 é o isomorfismo definido em 2.3.1 logo, $\|T_{n0}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^*} \leq \sqrt{\mu(\Omega)}\|\Lambda_0^{-1}\|$, pois $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ foi tomado arbitrário. Fazendo as devidas identificações, obtemos que a sequência $\{\varphi_{n0}\}$ é limitada em $H^{-1/2}(\Gamma)$. Segue da proposição 3.3.1 que $\{\varphi_{0n}\}$ é também limitada em $H^{-1/2}(\Gamma)$. O que conclui a afirmação anterior.

Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor a rigor que $\{\varphi_{n0}\}$ e $\{\varphi_{0n}\}$ fraco convergem para algum $\varphi,\ \phi \in H^{-1/2}(\Omega)$ respectivamente. Observe que, $\varphi = \phi$ em quase todo ponto. Com efeito, seja $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Seja $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que,

$$\int_\Gamma |\varphi - \varphi_{n0}| v d\Gamma < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.27}$$

$$\int_\Gamma |\varphi_n - \varphi_0| v d\Gamma < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.28}$$

$$\int_\Gamma |\varphi_{0n} - \phi| v d\Gamma < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.29}$$

Desta forma, pela proposição 3.3.2 e as desigualdades (3.27), (3.28) e (3.29). Obtemos então

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |\varphi - \phi| v d\Gamma &\leq \int_\Gamma |\varphi - \varphi_{n0}| v d\Gamma + \int_\Gamma |\varphi_{n0} - \varphi_{0n}| v d\Gamma + \int_\Gamma |\varphi_{n0} - \phi| v d\Gamma \\
&= \int_\Gamma |\varphi - \varphi_{n0}| v d\Gamma + \int_\Gamma |\varphi_n - \varphi_0| v d\Gamma + \int_\Gamma |\varphi_{n0} - \phi| v d\Gamma < \epsilon,
\end{aligned}$$

Como ϵ e v foram tomados arbitrariamente, segue que $\varphi = \phi$ em quase todo ponto.

Aplicando a relação de ortogonalidade (3.16) para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Gamma v\varphi_n d\Gamma = \int_{W_n} v dV.$$

para todo $v \in H_\Delta(\Omega) \cong H^{1/2}(\Omega)$. Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_n} vdV = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v\varphi_n d\Gamma = \int_\Gamma v\varphi_0 d\Gamma = \int_{W_0} vdV, \tag{3.30}$$

Agora aplicando a relação de ortogonalidade a cada $W_0\backslash W_n$ e $W_n\backslash W_0$ e obtemos,

$$\int_{W_0\backslash W_n} vdV = \int_\Gamma v\varphi_{0n} d\Gamma = \int_\Gamma v(\varphi_n - \varphi_0) + \int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma.$$

$$\int_{W_n\backslash W_0} vdV = \int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma = \int_\Gamma v(\varphi_0 - \varphi_n) + \int_\Gamma v\varphi_{0n} d\Gamma.$$

Passando o limite nas expressões anteriores, obtemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{W_0\backslash W_n} vdV &= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v(\varphi_n - \varphi_0) + \int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma \\
\lim_{n\to\infty} \int_{W_n\backslash W_0} vdV &= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v(\varphi_0 - \varphi_n) + \int_\Gamma v\varphi_{0n} d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{W_0\backslash W_n} vdV &= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v\varphi_{n0} d\Gamma = \int_\Gamma v\varphi d\Gamma \\
\lim_{n\to\infty} \int_{W_n\backslash W_0} vdV &= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma v\varphi_{0n} d\Gamma = \int_\Gamma v\varphi d\Gamma,
\end{aligned}$$

portanto, escolhendo $v = 1$, concluímos o teorema.

$\square$.

Note que o fato de $1 \in H_\Delta(\Omega)$ tem uma grande importância na demonstração do Teorema 3.3.1, e por isto, este resultado não pode ser estendido com estas técnicas para o caso da equação de Helmholtz.

Corolário 3.3.3 *Sejam* $W_0,\ W_n \in \mathcal{U}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *tais que* $\Psi(W_0) = \varphi_0$, $\Psi(W_n) = \varphi_n$, $\Psi(W_0\backslash W_n) = \varphi_{0n}$ *e* $\Psi(W_n\backslash W_0) = \varphi_{n0}$. *Se quaisquer duas das seguintes sentenças forem verdadeiras, então as outras também serão verdadeiras.*

(1) $\lim_{n\to\infty} \mu(W_0\backslash W_n) = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \mu(W_n\backslash W_0) = 0$

(3) $\{\varphi_n\}$ *converge fracamente para* φ_0 *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$

(4) $\{\varphi_{n0}\}$ *converge fracamente para* 0 *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

(5) $\{\varphi_{n0}\}$ *converge fracamente para* 0 *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

3.4 Método para Reconstrução de Fontes Características para o Operador de Laplace.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio regular com fronteira Γ de classe C^2 e $W \subset \Omega$ um conjunto não vazio, aberto, simplesmente conexo e limitado. Considere o problema (2.3) com $\kappa = 0$

$$f = \chi_W = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathbf{x} \in W \\ 0 \text{ se } \mathbf{x} \notin W. \end{cases}$$

Pela relação de ortogonalidade (3.16) aplicada a este caso, temos:

$$\int_W v dV = \int_\Gamma -v\varphi d\Gamma \ \forall v \in H_\Delta(\Omega), \tag{3.31}$$

obtemos então as seguintes informações adicionais,

1. Massa de W
$$\mu(W) = \int_\Gamma \varphi d\Gamma \tag{3.32}$$

2. Centro de massa $\mathbf{x}^0 = (x_i^0)_1^d$ de W
$$\mu(W) x_i^0 = \int_\Gamma x_i \varphi d\Gamma \tag{3.33}$$

.

O método consiste em resolver o problema direto em um "hiperquadrado"de referência $\hat{Q} = [-1,1]^d$. Desta forma, seja $\hat{Q} = [-1,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\hat{Q} \subset \Omega$. De fato, considere $Q_k = \alpha_k \hat{Q} + \mathbf{x}_k$, veja que Q_k pode ser escolhido de forma a estar dentro de Ω uma vez que α_k é uma dilatação ou contração e $\mathbf{x}_k \in \Omega$ é escolhido arbitrariamente. Podemos transportar o problema definindo,

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{x} \in Q_k$$

para $\mathbf{x} \in \hat{Q}$. Não é difícil perceber que

$$T_k^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_k}{\alpha_k} \in \hat{Q}$$

para $\mathbf{y} \in Q_k$.

Proposição 3.4.1 *Se $v(\mathbf{x})$ é solução de, $\Delta v = \chi_{\hat{Q}}$ se e somente se $\Delta u_k = \chi_{Q_k}$, onde $u_k(\mathbf{y}) = \alpha_k^2 v(T_k^{-1}(\mathbf{y}))$.*

Prova: Suponha que $v(\mathbf{x})$ seja solução de, $\Delta v = \chi_{\hat{Q}}$. então,

$$\begin{aligned}
\Delta u_k(\mathbf{y}) &= \alpha_k^2 \left\{\nabla \left[\nabla \left(v \left(T_k^{-1}(y)\right)\right)\right]\right\} \\
&= \alpha_k^2 \left\{\nabla \left[\frac{1}{\alpha_k} \nabla v \left(T_k^{-1}(y)\right)\right]\right\} \\
&= \Delta v \left(T_k^{-1}(y)\right) = \chi_{\hat{Q}}(T_k^{-1}(y)) = \chi_{Q_k}.
\end{aligned}$$

A recíproca é análoga, fazendo $v(x) = u_k(T_k(x))/\alpha_k^2$.

$\square$.

Desta forma sendo $G(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ a função de Green para o problema de Poisson, então

$$v(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_{\hat{Q}} G(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \ ; \ \mathbf{x} \in \Omega \tag{3.34}$$

é solução de,

$$\begin{cases} \Delta v = \chi_{\hat{Q}} \ ; & \Omega \\ v = 0 \ ; & \Gamma \end{cases}$$

Suponha que o centro de massa de W pertença ao seu interior. Seja $\mathcal{M}_n$ uma malha sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $\#\mathcal{M}_n = \kappa$ e μ a medida de Lebesgue usual. Suponha agora, que $\mathcal{M}_n$ satisfaz as seguintes condições.

1. Todo elemento $Q \in \mathcal{M}_n$ é um quadrado com $\mu(Q) = \frac{1}{(2^d)^n}$.

2. Existe $Q_0 \in \mathcal{M}_n$ tal que $\mathbf{x}_0$ pertence ao interior de Q_0.

Assim, $\#\mathcal{M}_n = \kappa = 2^{dn}\mu(\Omega)$.Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\frac{m}{(2^d)^n} =\leq \mu(W) < \frac{m+1}{(2^d)^n}.$$

Seja,

$$\mathcal{A}_n := \left\{ A \subset \Omega \text{ tal que } A = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j \ , \ Q_j \in \mathcal{M}_n \ , \ \mu(Q_i \cap Q_j) = 0, \text{ se } \ i \neq j \right\},$$

note que para todo $A \in \mathcal{A}_n$,

Definição 3.4.1 *Considere $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$, tal que $B \in \mathcal{B}_n$ se e somente se*

1. *$Q_0 \subset B$*

2. *B é conexo por caminhos.*

3. *O centro de massa de B é igual a $\mathbf{x}_0$.*

Note ainda que

$$\#\mathcal{B}_n < \#\mathcal{A}_n = \frac{\kappa!}{m!(\kappa - m)!}.$$

Considere então o problema direto,

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_B & ; \ \Omega \\ u = 0 & ; \ \Gamma \end{cases} \tag{3.35}$$

com $B \in \mathcal{B}_n$. Podemos observar que

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} u_j(\mathbf{x})$$

é solução do problema direto. Sendo então

$$\varphi_B = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \ ; \ \Gamma.$$

Desta forma para cada n temos apenas um número finito de Bs a considerar, portanto, existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que

$$\|\varphi - \varphi_{B_n}\| = \min_{B \in \mathcal{B}_n} \{\|\varphi - \varphi_B\|\} \tag{3.36}$$

Afim de simplificar a notação, chamaremos tais funções de φ_n.

Proposição 3.4.2 *Sendo φ_n como construímos em (3.36), então $\{\varphi_n\}$ é limitada em $H^{-1/2}(\Gamma)$*

Prova:

Tome $v \in H^{1/2}(\Gamma)$, tal que $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 1$. Lembrando que o mapeamento definido em 2.3.1 o qual denotamos por Λ_0 é um isomorfismo de $H_\Delta(\Omega)$ em $H^{1/2}(\Gamma)$. Fazendo as devidas identificações de $T_n \in [H^{1/2}(\Gamma)]^*$, com $\varphi_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$, e aplicando (3.16) segue que

$$\begin{aligned} |T_n(v)| &= \left| \int_\Gamma v \varphi_n d\Gamma \right| \\ &= \left| \int_{B_n} \Lambda_0^{-1}(v) dV \right| \\ &\leq \int_{B_n} |\Lambda_0^{-1}(v)| dV \\ &\leq \int_\Omega |\Lambda_0^{-1}(v)| dV \\ &\leq \sqrt{\mu(\Omega)} \|\Lambda_0^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{\mu(\Omega)} \|\Lambda_0^{-1}\| \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|\varphi_n\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{\sqrt{\mu(\Omega)}}{\|\Lambda_0^{-1}\|},$$

o que conclui a proposição.

$\square$.

Teorema 3.4.1 *Sejam $W \subset \Omega$ um conjunto aberto, conexo, limitado e $\{\varphi_n\}$ a sequência de funções construída em (3.36). Então φ_n converge fracamente para φ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Prova Sejam $W \subset \Omega$ um conjunto aberto, conexo, limitado e $\{\varphi_n\}$ a sequência de funções construída em (3.36). Suponha que $\{\varphi_n\}$ não converge fracamente para φ em $H^{-1/2}(\Gamma)$, então existem $\varepsilon_0 > 0$, $v_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \cong [H^{-1/2}(\Gamma)]^*$ com $\|v_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 1$ e uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ de $\{\varphi_n\}$ tal que

$$\left| \int_\Gamma v_0(\varphi_{n_k} - \varphi) \right| > \varepsilon_0, \tag{3.37}$$

para todo n_k. Por simplicidade, substituiremos n_k por apenas k e W por A_0. Pela construção das funções φ_k, temos que para cada k

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \min_{B \in \mathcal{B}_k} \|\varphi_B - \varphi\|, \tag{3.38}$$

onde $\mathcal{B}_k$ está definido em 3.4.1.

Note que para todo $E \subset \Omega$

$$\mu_{v_0}(E) = \int_E v_0 dV \tag{3.39}$$

define em Ω uma medida real que é absolutamente contínua com respeito a medida usual de Lebesgue ($d\mu = dV$). Desta forma dado $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon_0, v_0) > 0$ tal que

$$\mu(E) = \textstyle\int_E dV < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mu_{v_0}(E)| < \varepsilon_0. \tag{3.40}$$

O resultado em questão pode ser encontrado em [27].

Assim, como A_0 é um aberto conexo e limitado, para k suficientemente grande, podemos escolher A_k, tal que

1. $A_k \in \mathcal{B}_k$,
2. $A_k \subset A_0$,
3. $\mu(A_0 \backslash A_k) \leq \frac{1}{2^{dk}} < \delta$.

Temos, pela proposição 3.3.1, que $\varphi_{k0} = \Psi(A_k \backslash A_0) = 0$ e $\varphi_{0k} = \varphi - \tilde{\varphi}_k$, onde $\tilde{\varphi}_k = \Psi(A_k)$ e φ é o dado de Neumann do problema inverso (2.3). Daí e da relação de ortogonalidade (3.16), obtemos que

$$\int_{A_0 \backslash A_k} v_0 dV = \int_\Gamma v_0(\tilde{\varphi}_k - \varphi) d\Gamma$$

da condição (3) e de (3.40) obtemos

$$\left| \int_\Gamma v_0(\tilde{\varphi}_k - \varphi) d\Gamma \right| = |\mu_{v_0}(A_0 \backslash A_k)| \leq \varepsilon_0. \tag{3.41}$$

Seja $< v_0 >= \{\lambda v_0 \backslash \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ o subespaço vetorial de $H^{1/2}(\Gamma)$ gerado por v_0. Defina $T :< v_0 > \to \mathbb{R}$, tal que

$$T(v) = \lambda \int_\Gamma v_0(\tilde{\varphi}_k - \varphi) d\Gamma \quad \forall v \in < v_0 >$$

Temos que T define um operador linear limitado em $< v_0 >$ com

$$\|T\| \leq \varepsilon_0.$$

A última desigualdade segue pois se$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq 1$, então

$$|T(v)| = |\lambda| \left| \int_\Gamma v_0(\tilde{\varphi}_k - \varphi) d\Gamma \right| \leq |\lambda| \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

e por definição $\sup\{|T(v)| \backslash \ \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq 1\} = \|T\|$.

Podemos estender T a um funcional linear $T_{\tilde{k}} : H^{1/2}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ tal que $T_{\tilde{k}}(v) = T(v)$ para todo $v \in < v_0 >$ e $\|T_{\tilde{k}}\| = \|T\|$ A extensão $T_{\tilde{k}}$ de T possui a forma,

$$T_{\tilde{k}}(v) = \int_\Gamma v(\tilde{\varphi}_k - \varphi) d\Gamma$$

para todo $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Portanto, por 3.37,

$$\|\tilde{\varphi}_k - \varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|T_{\tilde{k}}\| \leq \varepsilon_0 < \left| \int_\Gamma v_0(\varphi_{n_k} - \varphi) \right| \leq \|\varphi_k - \varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \tag{3.42}$$

Contradizendo o fato de $\|\varphi_k - \varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \min\{\|\varphi_B - \varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \backslash \ B \in \mathcal{B}_k\}$. Concluímos assim o Teorema.

$\square$.

Observação 3.4.1 *O Teorema 3.4.1 é uma de nossas contribuições para a litera-*

tura, em resumo, mostramos que o conjunto formado por

$$\bigcup_{n}^{\infty} \left\{ \varphi_B = \Psi(B) \in H^{-1/2}(\Gamma); \quad B \in \mathcal{B}_n \right\}$$

é denso no conjunto de dados de Neumann associado ao problema inverso (2.3), isto é, é denso em $\Psi(\mathcal{U})$. O resultado em questão é valido em $\mathbb{R}^d$, exigimos apenas a regularidade suficiente no bordo de Ω, para aplicar a relação de ortogonalidade (3.16). Note que o método se aplica mesmo quando W não é um aberto estrelado, podemos então aplicar o Teorema 3.3.1 que também é uma de nossas contribuições.

Para o caso particular quando W é um aberto estrelado limitado de $\mathbb{R}^3$, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.4.1 *Sejam B_n os conjunto correspondente a φ_n, no caso especial em que W é um subconjunto de Ω, aberto, estrelado e limitado de $\mathbb{R}^d$. Então B_n converge para W*

Prova A demonstração desta proposição é uma consequência do Teorema 3.1.1. De fato, Sejam W é um subconjunto de Ω, aberto, estrelado e limitado de $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{B}$ o conjunto obtido quando $n \to \infty$ no Teorema 3.4.1. Segue então que $\Psi(\mathcal{B}) = \varphi$ ou ainda,

$$\begin{cases} \Delta w = \chi_{\mathcal{B}} \text{ em } \Omega \\ w = 0 \text{ em } \Gamma \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \Psi(\mathcal{B}) = \varphi \text{ em } \Gamma \end{cases} \tag{3.43}$$

Lembrando que Ψ está colocada na definição 3.3.1, e $\Psi(W) = \varphi$ pelo Teorema 3.4.1, sendo assim, seja u solução de um problema análogo a (3.43), trocando $\mathcal{B}$ por W. Daí segue que $u = w = 0$ em Γ, então pelo Teorema 3.1.1, segue que $\mathcal{B} = W$.

$\square$.

Capítulo 4

Considerações Finais

4.1 Conclusões

Provamos no capítulo 2 que a relação (2.28) é válida se e somente se vale (2.31). A primeira parte do teorema já era esperada e pode ser encontrada na literatura, por exemplo em [19], com uma roupagem ligeiramente diferente. Contudo a recíproca é um fato novo e mostra que a solução variacional do problema inverso de fonte da equação de Helmholtz, é preservada ao utilizarmos a função de Green ou uma soluçãos fundamental.

No capítulo 3, o Teorema 3.4.1 é um de nossos resultados, onde mostramos que o conjunto formado por

$$\bigcup_{n}^{\infty} \left\{ \varphi_B = \Psi(B) \in H^{-1/2}(\Gamma); \quad B \in \mathcal{B}_n \right\}$$

é denso no conjunto de dados de Neumann associado ao problema inverso (2.3), isto é, é denso em $\Psi(\mathcal{U})$. O resultado em questão é valido em $\mathbb{R}^d$, exigimos apenas a regularidade suficiente no bordo de Ω, para aplicar a relação de ortogonalidade (3.16). Note que o método se aplica mesmo quando W não é um aberto estrelado, podemos então aplicar o Teorema 3.3.1 que também é uma de nossas contribuições. O Teorema 3.2.2 nos fornece uma condição suficiente para estabelecer a unicidade da reconstrução de uma fonte característica com respeito a equação de Helmholtz.

4.2 Trabalhos Futuros

Estabelecemos nesta tese uma série de boas propriedades com respeito ao seguinte operador,

$$F(f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{4.1}$$

Sabemos por exemplo que tal operador está bem definido e é contínuo em $L^2(\Omega)$. Considere o problema inverso (2.3).

Pretendemos, em um futuro próximo, estabelecer uma condição necessária e suficiente para que o problema de minimizar o funcional F com respeito a φ, isto é;

$$\inf_{f \in L^2(\Omega)} \|F(f) - \varphi\|^2,$$

seja equivalente aos métodos propostos no capítulo 2. Estabelecendo tal condição pretendo ainda fazer uma análise com respeito a regularização de Tikhonov, comparativa com os trabalhos já desenvolvidos até o presente momento.

Deve ser notado ainda que tal problema nunca foi olhado a luz do método de regularização de Tikhonov, e que o operador F aqui definido nunca foi estudado neste contexto. Afim de aplicarmos o método de regularização de Tikhonov, é necessário definir um operador linear, D de tal forma que, pretendemos aproximar as soluções de (2.3) através da solução do problema

$$\min\{\|F(f) - \varphi\|^2 + \alpha\|D(f) - f^*\|^2\}.$$

O operador D em questão deverá ser tomado como a derivada de Fréchet de F e f^* uma função admissível adequada. Uma vez obtidos os resultados, passaremos a fase de comparação computacional, afim de determinar o método menos custoso.

Com respeito aos resultados do capítulo (3), ainda nos falta uma implementação computacional para o método proposto, a qual já vem sendo providenciada. Ainda com respeito ao funcional (F-N) no contexto das funções características, pretendemos mostrar que $\mathcal{U}$ é um espaço métrico segundo a métrica de Hausdorff e com está métrica o operador (F-N) é contínuo. Com relação ao método apresentado no capítulo (3), quanto mais informações soubermos a respeito do objeto procurado menor será o custo para identifica-lo. Assim fazendo uso da teoria de representação, desenvolvida por Bishop-Choquet que teve início na decada de 50 com o trabalho [28], pretendo identificar os pontos extremais do conjunto procurado (isto é, "os vértices") reduzindo então os custos do método.

Referências Bibliográficas

[1] ENGL, H. W., HENK, M., NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems.* 1 ed. Berlin, Kluer Academic, 2000.

[2] ALVES, C., AL. "Recovering the source term in a linear diffusion problem by the method of fundamental solutions", *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, n. 8, pp. 1005–1021, 2008.

[3] BADIA, E., NARA, T. "An inverse source problem for Helmholtz's equation from the Cauchy data with a single wave number", *Inverse Problems*, v. 27, n. 10, pp. 1–20, 2011.

[4] HETTILICH, F., RUNDELL, W. "Recovery of the support of a source in an elliptic differential equation", *Inverse Problems*, v. 13, n. 2, pp. 959–976, 1997.

[5] HETTILICH, F., RUNDELL, W. "A Second degree method for nonlinear inverse problems", *SIAM J Numer Anal*, v. 37, n. 2, pp. 587–620, 2000.

[6] KRESS, R., IVANYSHYN, O. "Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks", *Journal of Integral Equations and Applications*, v. 18, n. 1, pp. 1–20, 2006.

[7] LEITÃO, A., MARQUES, A. "On level set type methods for elliptic Cauchy problems", *Inverse Problems*, v. 23, n. 5, pp. 2207–2222, 2007.

[8] ALVES, C., MARTINS, N., ROBERTY, N. "Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements", *Inverse Problems and Imaging*, v. 3, n. 2, pp. 275–294, 2009.

[9] BADIA, E., HA-DUONG, T. "An inverse source problem in potential analysis", *Inverse Problems*, v. 16, n. 3, pp. 651–663, 2000.

[10] BADIA, E., HA-DUONG, T. "Some remarks on the ptoblem of source identification fro boundary measurements", *Inverse Problems*, v. 14, n. 4, pp. 883–891, 1998.

[11] HETTILICH, F., RUNDELL, W. "Identification of a discontinuous sourse in the heat equation", *Inverse Problems*, v. 17, n. 5, pp. 1–20, 2001.

[12] LIONS, J. L., MAGENES, E. *Non homogeneous boundary value problems and applications.* 3 ed. Berlin, Spring-Verlag, 1972.

[13] ROBERT, A., FOURNIER, J. *Sobolev spaces.* Academicn press, 2003.

[14] NOVIKOV, P. "Sur le probleme inverse du potentiel", *Dokl. Akad. Nauk*, v. 18, pp. 165, 1938.

[15] ISAKOV, V. *Inverse Source problems.* 2 ed. Mathematical Surveys and Monographs 34, American Mathematical Society, 1990.

[16] RING, W. "Identification of a Core from Boundary Data", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 55, n. 3, pp. 677–706, 1995.

[17] ROBERTY, N., ALVES, C. "On the identification of star shape sources from boundary using a reciprocity functional,", *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 17, n. 2, pp. 1–20, 2009.

[18] CAKONI, F., KRESS, R. "Integral Equations for Inverse Problems in Corrosion Detection From Partial Cauchy Data", *Inverse Problems and Imaging*, v. 1, n. 2, pp. 229–245, 2007.

[19] ANGER, G. *Inverse problems in differential equations.* 1 ed. Berlin, Springer Verlag, 1990.

[20] RUDIN, W. *Functional Analysis.* MacGRAW-Hill, 1973.

[21] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev.* 2 ed. Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2000.

[22] KRESS, R. *Linear Integral Equations.* 2 ed. Applied Mathematical Science 82, Spring-Verlag, 1980.

[23] RAINHA, M., ROBERTY, N. "Integral and Variational Formulations for the Helmholtz Equation Inverse Source Problem", *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2012, n. 2012, pp. 1–28, 2012.

[24] NECAS. *Les methodes direct en theorie des equations elliptiques.* 3 ed. Paris, Masson et C^{ie}, 1967.

[25] MARTINS, N. "An iterative shape reconstruction of source functions in a potential problem using the MFS", *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 20, n. 8, pp. 1–19, 2012.

[26] GILBARG, D., TRUDINGER, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2 ed. Berlin, Springer Verlag, 1980.

[27] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* MacGRAW-Hill, 1987.

[28] BISHOP, E. "A minimal boundary for functions algebra", *Pacific J. Math.*, v. 9, n. 3, pp. 629–642, 1959.