



PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE FONTES EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS

Roberto Mamud Guedes da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Nilson Costa Roberty
Carlos José Santos Alves

Rio de Janeiro
Março de 2016

PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE
FONTES EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS

Roberto Mamud Guedes da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

Prof. Rolci de Almeida Cipolatti, D.Sc.

Prof. Cesar Javier Niche Mazzeo, D.Sc.

Prof. Antônio José da Silva Neto, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2016

Silva, Roberto Mamud Guedes da

Problema Inverso de Reconstrução e Identificação de Fontes em Equações Elípticas/Roberto Mamud Guedes da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XI, 97 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Nilson Costa Roberty

Carlos José Santos Alves

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Nuclear, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 92 – 97.

1. Problema Inverso. 2. Reconstrução de Fonte.
3. Equação Elíptica. I. Roberty, Nilson Costa *et al.*
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

Agradecimentos

A Deus, Senhor de todas as coisas, que sempre abençoou-me e proporcionou-me mais esta conquista importante.

A minha esposa, Rozieli, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos de minha vida, em particular, neste quatro anos de doutorado. Sou grato a Deus por ter me concedido uma esposa tão sábia, amorosa, carinhosa, paciente e que sempre me animou nos momentos mais difíceis desta caminhada.

Aos meus pais, Magaly e Laercio, por sempre terem me incentivado e apoiado na minha vida, onde se esforçaram para manter acesos meus sonhos pessoais e acadêmicos. Ao meu irmão, Rodrigo, por sempre ter estado pronto a ouvir minhas preocupações e anseios da universidade e pelas conversas descontraídas que sempre nos relaxaram e nos fizeram dar risadas. A toda minha família pela compreensão nos momentos ausentes e pelo carinho demonstrado em toda minha vida. Aos meus sogros, Rosângela e Gilmar, e cunhados, Rosana e Ramon, pelo acolhimento sincero e carinhoso que obtive em sua casa, onde percebi que fazia parte de mais uma família.

Aos meus orientadores, Nilson e Carlos, por todo conhecimento adquirido nestes quatro anos. Não imaginava que conseguiria amadurecer academicamente de forma profunda em tão pouco tempo. Agradeço ao prof. Nilson, pelas conversas e ensinamentos não somente do conteúdo, como também da vida acadêmica. Agradeço ao prof. Carlos, pelo acolhimento durante os três meses de doutorado sanduíche no IST, Lisboa, além do suporte recebido após meu retorno ao Brasil. Todas as contribuições foram de grande valia para este trabalho.

Aos professores Eduardo Gomes Dutra do Carmo, Rolci de Almeida Cipolatti, Cesar Javier Niche Mazzeo e Antônio José da Silva Neto, por terem aceito o convite de participação da defesa e pelas sugestões para a versão final desta tese.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro durante o período de doutoramento no Brasil.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro durante o período de doutorado sanduíche no Instituto Superior Técnico (IST), em Lisboa, Portugal.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE
FONTES EM EQUAÇÕES ELÍPTICAS

Roberto Mamud Guedes da Silva

Março/2016

Orientadores: Nilson Costa Roberty
Carlos José Santos Alves

Programa: Engenharia Nuclear

Neste trabalho estamos interessados em estudar o problema inverso de fonte para Equações de Helmholtz. Supondo que o termo fonte seja dado por uma função característica, apresentamos um novo resultado de reconstrução do centro de gravidade (centroide) do suporte da fonte a partir de medições na fronteira. A reconstrução da fronteira deste suporte é feita através de um método numérico computacional.

Além disso, através de uma nova classe de dados de Neumann, é estabelecido um resultado de estabilidade condicional.

Experimentos numéricos relacionados com reconstrução do centroide e da fronteira do suporte e com estabilidade na reconstrução de fontes são apresentados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

INVERSE SOURCE RECONSTRUCTION AND IDENTIFICATION PROBLEM
IN ELLIPTIC EQUATIONS

Roberto Mamud Guedes da Silva

March/2016

Advisors: Nilson Costa Roberty
Carlos José Santos Alves

Department: Nuclear Engineering

In this work, we are interested in study the inverse source problem for Helmholtz Equations. Supposing that the source term is given by a characteristic function, we present a new result about the reconstruction of gravity center (centroid) of the source support from boundary measurements. The reconstruction of boundary support is obtained by a computational numerical method.

Furthermore, through a new class of Neumann data, a conditional stability result is established.

Numerical experiments related to centroid and boundary support reconstruction and to stability of source reconstruction are presented.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Revisão Bibliográfica	1
2 Métodos Numéricos Computacionais	6
2.1 Método das Soluções Fundamentais	6
2.1.1 Objetivo Geral	6
2.2 O Algoritmo de Levenberg-Marquardt	10
3 O Problema Inverso de Fonte para Equações de Helmholtz	13
3.1 Apresentação dos Problemas Direto e Inverso	13
3.2 O Funcional de Reciprocidade	14
3.3 A Equivalência com o Problema Inverso de Salto	16
4 A Reconstrução do Centroide de Fontes Características para Equações de Helmholtz	19
4.1 O Teorema de Caracterização do Centroide	19
4.2 Experimentos Numéricos para Determinação do Centroide	26
4.2.1 Experimento, via MFS, com solução analítica no caso circular	26
4.2.2 Experimentos Numéricos para Obtenção do Centroide - Caso Não-Circular	29
4.3 O Caso de Fontes Pontuais	32
5 A Reconstrução da Fronteira de Fontes Características usando o Método das Soluções Fundamentais	35
5.1 O Problema Direto via MFS	35
5.2 O Funcional a ser Minimizado	39
5.3 Experimentos Numéricos de Reconstrução da Fronteira	41
5.3.1 Experimentos Numéricos - Caso $\lambda > 0$	41
5.3.2 Experimentos Numéricos - Caso $\lambda < 0$	49

6	O Problema de Estabilidade Condicional para Equações de Helmholtz	53
6.1	A Estabilidade em Problemas Inversos	53
6.2	A Estabilidade Condicional em L^1 e em L^∞	55
6.3	Experimentos Numéricos de Estabilidade do Problema Inverso de Fonte	63
7	O Problema Inverso de Fonte para Equações Elípticas	69
7.1	O Operador Elíptico de Segunda Ordem	69
7.2	O Problema de Advecção-Difusão Estacionário	73
7.2.1	A Formulação Variacional para o Problema Elíptico Modificado	75
7.3	O Funcional de Reciprocidade para o Problema Elíptico Modificado .	77
7.4	A Fórmula do Centroide para o Problema Elíptico Modificado	79
7.4.1	Caso Fonte Característica	79
7.4.2	Caso Fonte Pontual	87
8	Conclusões e Trabalhos Futuros	90
8.1	Conclusões	90
8.2	Trabalhos Futuros	91
	Referências Bibliográficas	92

Lista de Figuras

4.1	Erro entre a solução analítica, Q , e a solução pelo MFS	28
4.2	Domínio do Problema - 7-Estrelado dentro da Elipse	30
4.3	Domínio do Problema - Caso Quadrado dentro do Círculo	31
4.4	Domínio do Problema - 3-Estrelado dentro círculo, κ complexo	31
5.1	Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)	42
5.2	Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c), 30% (d)	43
5.3	Variação em λ : $\lambda = 0.1$ (a) , $\lambda = 0.55$ (b) , $\lambda = 4$ (c), $\lambda = 10$ (d)	44
5.4	Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)	44
5.5	Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)	45
5.6	Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c), 50% (d)	46
5.7	Domínio considerado (a) e reconstrução, após 10 iterações, sem ruído (b)	46
5.8	Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c)	47
5.9	Ruído Absoluto: 0.01% (a) , 0.05% (b) , 0.1% (c)	48
5.10	Domínio considerado (a) e reconstrução, após 10 iterações, sem ruído (b)	49
5.11	Caso $\lambda < 0$: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)	50
5.12	Caso κ Complexo: Ruído Relativo: 1% (a) , 10% (b) , 30% (c)	51
5.13	Caso κ complexo: Ruído Absoluto: 1% (a) , 5% (b)	52
6.1	Domínio Considerado (a) e dado de Neumann original, g_η (b)	64
6.2	Ruído Absoluto 1%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)	64
6.3	Ruído Absoluto 5%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)	65

6.4	Ruído Absoluto 10%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)	66
6.5	Ruído Absoluto 20%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)	67
6.6	Ruído Absoluto 30%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)	68

Lista de Tabelas

4.1	Erro do Centroide - Caso Circular	28
4.2	Erro do Centroide - Caso Circular - Ruído Dirichlet fixo 1%	29
4.3	Erro do Centroide - Caso Circular - Ruído Dirichlet fixo 10%	29
4.4	Erro do Centroide - Caso 7-Estrelado	30
4.5	Erro do Centroide - Caso Quadrado	31
4.6	Erro do Centroide - Caso κ complexo	32

Capítulo 1

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresentamos uma revisão bibliográfica dos temas estudados nesta tese.

Nas últimas três décadas, a teoria de problemas inversos tem se tornado cada dia mais presente na pesquisa científica. Uma das razões do porquê esta área vem ganhando mais visibilidade é a grande quantidade de aplicações em diversas áreas como a matemática, a engenharia e a medicina.

Essencialmente, podemos separar os problemas inversos em duas categorias: problemas inversos de reconstrução de fonte e reconstrução de parâmetros.

Em problema inverso de reconstrução de fonte, estamos interessados em determinar ou reconstruir o termo fonte a partir de informações já conhecidas. Em geral, queremos determinar a partir do dado de Cauchy sobre a fronteira do domínio em questão. Dependendo do modelo estudado, estamos lidando com aplicações diferentes, onde podemos citar alguns exemplos como a detecção não-destrutiva de objetos, a identificação de falhas materiais ou até mesmo a detecção de tumores através de exames não-invasivos, como a tomografia computadorizada, [1].

Em problemas inversos de reconstrução de parâmetros, estamos interessados em determinar alguns parâmetros a partir de medições (dado de Cauchy) na fronteira do domínio. Estes parâmetros informam sobre características materiais, como por exemplo, a condutividade, a viscosidade, seções de choque de espalhamento e cisalhamento. Como exemplo, podemos citar a identificação de propriedades materiais, como a condutividade, através de medições externas e de algoritmos computacionais. Estas propriedades podem, imediatamente, reportar falhas, anomalias ou características de materiais, [2], [3]. Além disso, várias técnicas utilizadas podem ser aplicadas em diferentes contextos, com as devidas modificações, e por conta disso esta é uma área em expansão. Outros exemplos podem ser encontrados em [4].

A questão central ao estudarmos problemas inversos de fontes para modelos com operadores fortemente elípticos e com dado de Cauchy na fronteira é a unicidade. Em [5] e [6], é mostrado que somente um dado sobre a fronteira (dado de Dirichlet

nulo) contém toda informação específica a ser usada na reconstrução do termo fonte para as equações de Helmholtz e de Poisson, respectivamente. Logo, a falta de unicidade é uma consequência disto.

Desta forma, o problema inverso de fonte é mal-posto, no sentido de Hadamard, [7], não só por questões associadas à regularidade do operador inverso (questão relacionada à estabilidade), mas também pela não unicidade da fonte obtida com os dados na fronteira. Um exemplo desta situação é mostrado no capítulo 7, para a equação de difusão-advecção. Podemos citar outros 2 exemplos de não-unicidade da reconstrução do termo fonte: No problema inverso de fonte para o modelo de EEG - *electroencephalography*, El Badia e Ha Duong, [8], mostraram um exemplo de não unicidade para fontes dipolares equivalentes. No problema inverso de fonte para equação de Helmholtz, El Badia e Nara, [9], mostraram que para fontes da forma $\lambda\chi_\omega$, onde a intensidade λ e o subconjunto ω são desconhecidos, não é possível reconstruir estas duas informações a partir do mesmo dado de Cauchy, com o mesmo número de onda.

Ao estudarmos a implementação numérica destes modelos, também encontramos um problema relacionado com unicidade. Se a fonte não pertencer a uma classe especial de funções, obteremos um sistema algébrico com posto deficiente, ver [10]. Por outro lado, se a fonte pertencer a alguma classe especial, os valores singulares do sistema algébrico de dimensão finita que aproxima o operador decaem gradualmente a zero. As principais ferramentas de regularização a serem usadas nesta segunda situação, e consequentemente neste problema, são truncamento, método de Tikhonov e métodos iterativos do tipo Landweber, ver [10] e [11], e métodos semi iterativos baseados em espaço de Krilov, ver também [12].

Logo, para contornar a falta de unicidade, podemos restringir a classe de funções que esperamos reconstruir. Desta forma, com esta informação *a priori* sobre o termo fonte, o problema inverso torna-se bem-posto. As principais classes de funções, F , consideradas são:

- Fontes pontuais dadas por distribuições do tipo delta de Dirac, δ : Neste caso, temos uma classe de fontes da forma

$$\mathcal{A} = \left\{ F = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j \delta_{S_j} + \sum_{k=1}^{m_2} p_k \cdot \nabla \delta_{C_k} \right\}.$$

Podemos citar, por exemplo, [8], onde El Badia e Ha Doung consideraram como termo fonte uma combinação de fontes mono e dipolar para equação que modela EEG,

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F.$$

Além disso, em [13] foi considerado este tipo de fonte para a equação linear de

difusão-dispersão-reação unidimensional para o estudo de difusão de poluentes. A equação considerada foi

$$\partial_t u(x, t) - D\partial_{xx}u(x, t) + V\partial_x u(x, t) + Ru(x, t) = \lambda(t)\delta(x - S),$$

para $0 < x < l$ e $0 < t < T$, onde u é a concentração de poluente, V é a velocidade do rio, D é o coeficiente de dispersão, R é o coeficiente de reação, $0 < S < l$ e $\lambda(t) \in L^2(0, T)$. Em [9], foi considerada a equação de Helmholtz com fonte sendo uma combinação linear de fontes monopulares.

- Fontes características de subconjuntos do domínio do problema: Neste caso, temos a classe

$$\mathcal{A} = \{F = \lambda\chi_\omega\}.$$

Podemos citar, por exemplo, [14], onde Roberty e Alves consideraram o problema inverso de Poisson de reconstrução numérica de fonte a partir dos dados de Cauchy. Por outro lado, em [15], Sousa e Roberty consideraram o problema de difusão-advecção estacionário e propuseram um método numérico, baseado na discretização das variáveis do problema e na resolução de um sistema linear associado, para determinar uma aproximação do subconjunto ω .

Em um trabalho clássico de 1938, Novikov, [16], estabeleceu unicidade na reconstrução de fontes características a partir dos dados na fronteira para a equação de Poisson. A fonte considerada foi uma função característica de um subconjunto estrelado do domínio. Se consideramos a equação de Helmholtz, Novikov também estabeleceu unicidade na reconstrução de fontes características de subconjuntos convexos do domínio.

Também podemos citar [17], [18], [19];

- Fontes regulares que pertençam a classes lineares do tipo

$$\mathcal{C}(\lambda, F) = \{f \in H^1(\Omega); (\Delta - \lambda)f = F\},$$

onde em [20], Alves et al. mostraram que se o termo fonte do problema de Poisson pertence a esta classe linear, então este pode ser unicamente identificado pelo dado de Cauchy sobre a fronteira;

- Fontes f que podem ser escritas separando as variáveis, ou seja, como um produto de funções de variáveis diferentes, onde podemos citar, por exemplo, [6], que considerou este tipo de fonte para o problema de Poisson, supondo o conhecimento de observações em parte da fronteira do domínio;
- Fontes acústicas, onde são considerados vários números de onda na equação

de Helmholtz, por exemplo, como feito em [5]. Em [21], foi considerado que o termo fonte pudesse ser escrito como um produto de uma função do número de onda (frequência), κ , por uma função da variável espacial, com isto um resultado de identificação completa foi estabelecido usando a formulação fraca do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \nabla \cdot (a \nabla u) + \kappa^2 b u = -h(\kappa) f(x), & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u - \Lambda u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $a, b \in L^\infty(\Omega)$, além de supor algumas condições adicionais sobre a, b para trabalhar com um problema uniformemente elíptico.

Outro aspecto que podemos estudar do problema inverso é a estabilidade. O problema inverso de estabilidade seria verificar se partindo de dados de Cauchy "próximos", em um certo sentido, conseguimos determinar fontes "próximas", em um certo sentido.

Em [22], Yamamoto considerou a equação do calor em um retângulo

$$\partial_t u(x_1, x_2, t) = \Delta u(x_1, x_2, t) + \sigma(t) f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad 0 < t < T,$$

com condição inicial nula e condição de Neumann nula, e provou que se σ é conhecido, com $\sigma(0) \neq 0$, então f pode ser determinada unicamente a partir da fronteira da base $u(x_1, 0, t)$, com $0 < x_1 < 1$ e $0 < t < T$. Além disso, se f estiver em um determinado espaço, então foi provada uma desigualdade entre a norma L^2 de f e a norma H^1 de $u(\cdot, 0, \cdot)$, com $0 < x_1 < 1$ e $0 < t < T$.

Chamamos um resultado de estabilidade de "condicional" se este resultado depende de hipóteses adicionais sobre os dados iniciais, dados de fronteira ou classe de funções consideradas.

Em [23], Blasten et al. consideraram problemas de valor de contorno para operadores de Schrödinger bidimensionais da forma

$$L_q(x, D)u = \Delta u + qu,$$

onde $q \in L^p(X)$, $p > 2$, é a função potencial, com $X \subset \mathbb{R}^2$, subconjunto limitado com fronteira regular. Considerando uma classe de potenciais menos regulares, neste mesmo trabalho, Blasten et al. provaram uma estimativa de estabilidade condicional de ordem logarítmica. Além disso, provaram um resultado de unicidade na classe de potenciais L^p , para $p > 2$.

Desta forma, este trabalho possui o interesse de estudar o problema inverso de fontes para equações elípticas de segunda ordem, com coeficientes constantes. Para a equação de Helmholtz, vamos estabelecer um novo resultado de reconstrução

do centro de massa (centroide) para o problema inverso de fonte característica. Para reconstruir a fronteira deste suporte, vamos utilizar o algoritmo de Levenberg-Marquardt para minimizar o funcional "erro cometido", que será definido de forma adequada posteriormente. Além disso, através de uma nova classe de dados de Neumann considerada, vamos apresentar um novo resultado de estabilidade condicional para o problema inverso de fonte posto para equação de Helmholtz.

Parte dos resultados novos desta tese podem ser encontrados em [24].

Desta forma, esta tese está organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2 são apresentados dois métodos numéricos que serão usados neste trabalho. A saber, o método das soluções fundamentais, a ser usado para determinar solução numérica de problemas elípticos e o algoritmo de Levenberg-Marquardt, a ser usado na minimização de um funcional a partir de um conjunto de parâmetros. No capítulo 3, são apresentadas as equações de Helmholtz, e os respectivos problemas direto e inverso relacionados a esta equação. Neste capítulo, também são definidos alguns operadores integrais que serão importantes para os resultados que serão apresentados posteriormente.

No capítulo 4, estabelecemos um novo resultado sobre reconstrução do centro de massa (centroide) do suporte de uma fonte característica no problema inverso de fonte para equações de Helmholtz. Experimentos numéricos para a verificação da eficácia desta fórmula proposta também são apresentados.

No capítulo 5, estudamos o problema de reconstrução da fronteira do suporte de fontes características. Para isto, será estudado o problema direto com fonte característica para a equação de Helmholtz através do método das soluções fundamentais, apresentado no capítulo 2. Com esta solução numérica e através de um novo funcional definido, são realizados experimentos numéricos para a reconstrução da fronteira de suportes de fontes características

No capítulo 6, supondo a existência e a unicidade do problema inverso de fonte característica para o operador de Helmholtz, apresentamos um novo resultado sobre estabilidade condicional para problemas inversos de fonte. Experimentos numéricos relacionados ao problema de estabilidade, comparando suportes dos termos fontes e dados de Cauchy, são apresentados.

No capítulo 7, estudamos o problema inverso de fonte para equações elípticas de segunda ordem com coeficientes constantes e mostramos que, através de duas mudanças de variáveis apropriadas, é suficiente estudar as equações de Helmholtz. Neste capítulo, também é estabelecida uma versão da fórmula para reconstrução do centroide para este tipo de equação.

Por fim, no capítulo 8, apresentamos as conclusões sobre o trabalho desenvolvido e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Métodos Numéricos Computacionais

Neste capítulo, vamos apresentar dois métodos numéricos utilizados ao longo deste trabalho.

Na seção 2.1, será apresentado o Método das Soluções Fundamentais para determinar solução numérica do problema direto considerado posteriormente.

Na seção 2.2, será apresentado o Método de Levenberg-Marquardt para minimização de funcional a partir de um conjunto de parâmetros. Este método será usado para reconstrução da fronteira do suporte da fonte característica.

2.1 Método das Soluções Fundamentais

O método das soluções fundamentais (*method of fundamental solution - MFS*), é uma técnica usada para determinar solução numérica de certos problemas de valor de fronteira, [28]. Este método foi proposto por Kupradze e Alekside na década de 60, por exemplo, nos trabalhos [29], [30] e [31]. Além disso, este método é associado à classe dos métodos de contorno. Um dos métodos de contorno mais conhecidos é o método de elemento de contorno (*boundary element method - BEM*), onde podemos citar, por exemplo, [32] e [33]. O MFS tem sido utilizado recentemente para resolver vários tipos de problemas inversos, [43].

2.1.1 Objetivo Geral

Conforme comentado na introdução do capítulo, vamos definir o método das soluções fundamentais para determinar uma solução numérica para certas equações elípticas homogêneas. Vamos seguir as ideias de [28].

Definição 2.1. Chamamos $\Phi(x, P)$ de solução fundamental para o operador dife-

rencial parcial elíptico linear, L , se

$$L\Phi(x, P) = \delta(x, P),$$

onde $\delta(x, P)$ denota a função delta de Dirac, centrada no ponto P . Desta forma, a função $\Phi(x, P)$ está definida em \mathbb{R}^2 , ou \mathbb{R}^3 , exceto no ponto P , onde esta é singular. O ponto P é chamado de singularidade para a solução fundamental Φ .

O método das soluções fundamentais é definido a seguir.

Definição 2.2. Considere o problema em Ω , subconjunto de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ,

$$Lu = 0, \tag{2.1}$$

onde L é um operador diferencial elíptico linear. A solução aproximada pelo Método das Soluções Fundamentais (MFS) para o problema (2.1) é dada por

$$u_A(x) = \sum_{i=1}^{M^*} c_i \Phi(x, P_i), \quad x \in \overline{\Omega},$$

onde as singularidades P_i , com $i = 1, 2, \dots, M^*$, são consideradas fora do domínio $\overline{\Omega}$.

Observação 2.1. Podemos supor que o conjunto de pontos singulares $\{P_i\}$, também chamados de conjunto de fontes pontuais ou de pontos de fonte, pertencem à fronteira de um conjunto $\widehat{\Omega}$, com $\Omega \subset \widehat{\Omega}$. A fronteira $\partial\widehat{\Omega}$ é chamada de fronteira fictícia do problema MFS, ao passo que $\partial\Omega$ é chamada de fronteira física do problema MFS.

Observação 2.2. Kupradze e Alekside foram os primeiros a propor uma formulação para o MFS acima, na década de 60, [29], [30] e [31].

Observação 2.3. A posição dos pontos de fonte são pré-assumidas ou são determinadas junto com os coeficientes c_i , $i = 1, 2, \dots, M^*$, de tal forma que a solução fundamental também satisfaça, em algum sentido, às condições de fronteiras, quando houver. Este "sentido" é usando método de colocação sobre a fronteira física, $\partial\Omega$, com os respectivos dados sobre esta fronteira e resolvendo um sistema linear associado.

Neste trabalho vamos considerar que os pontos de fonte tenham suas posições pré-assumidas.

Em [60], Alves e Chen consideraram um problema de valor de contorno não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ \mathcal{B}u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde L , novamente, é um operador diferencial elíptico linear, Ω um domínio limitado e conexo de \mathbb{R}^2 , ou \mathbb{R}^3 , com fronteira, $\partial\Omega$, suficientemente regular, e \mathcal{B} um operador linear de fronteira.

Em geral, para determinar solução do problema (2.2) procedemos da seguinte forma:

1. Encontrar uma solução particular, u_p , para equação $Lu = f$, em Ω ;
2. Resolver o problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu_h = 0, & \text{em } \Omega \\ \mathcal{B}u_h = g - \mathcal{B}u_p, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

3. A função $u := u_p + u_h$ é solução de (2.2).

O passo 1 nem sempre é fácil, dependendo do operador L . Desta forma, Alves e Chen, [60], consideraram $L = \Delta - \mu$, onde $\mu \in \mathbb{C}$, e $\mathcal{B}u = u$. Com isto, o passo 1 foi resolvido usando MFS-D, ou seja, usando o MFS considerando pontos de fonte ao longo de todo o domínio Ω , com o objetivo de aproximar a função f . O passo 2 foi resolvido usando MFS-B, ou seja, usando o MFS usual, considerando os pontos de fonte ao longo de uma fronteira fictícia.

Observação 2.4. *Também é possível considerar uma expansão da solução variando a frequência μ .*

Nesta tese, vamos estudar o problema de valor de contorno posto para a equação de Helmholtz, onde estaremos seguindo as ideias de [60]. Este problema envolvendo MFS será definido de forma adequada no capítulo 5, seção 5.1.

De maneira geral, vamos apresentar como é posto para a equação de Helmholtz o problema de valor de contorno usando MFS.

Considere o seguinte problema: Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, encontrar $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observação 2.5. *No capítulo 5 será visto que o problema (2.4) está relacionado com a resolução numérica do problema direto para a equação de Helmholtz.*

Seja Φ_λ solução fundamental para o operador $L = -\Delta + \lambda$ e, então, suponha que u possa ser escrita como

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} \Phi_{\lambda_j}(\sqrt{\lambda_j}|x - y_i|), \quad (2.5)$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$, e $\{y_j\}$ são pontos colocados sobre uma fronteira fictícia, também chamada de *conjunto de fontes admissíveis* $\widehat{\Gamma}$, ver [63] e [60], e $\alpha_{i,j}$ são constantes a serem determinadas.

Neste caso, substituindo (2.5) em (2.4), obtemos

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} (\lambda_j + \lambda) \Phi_{\lambda_j}(\sqrt{\lambda_j} |x - y_i|), \quad (2.6)$$

para $x \in \Omega$, e

$$g(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} \Phi_{\lambda_j}(\sqrt{\lambda_j} |x - y_i|), \quad (2.7)$$

para $x \in \partial\Omega$.

Desta forma, tome pontos de colocação $\{x_l\}$ e $\{x_m\}$ em \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou $d = 3$, tais que

$$f(x_l) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} (\lambda_j + \lambda) \Phi_{\lambda_j}(\sqrt{\lambda_j} |x_l - y_i|),$$

para $x_l \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ e

$$g(x_m) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} \Phi_{\lambda_j}(\sqrt{\lambda_j} |x_m - y_i|),$$

para $x_m \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Neste sistema de colocação, devemos ter $\#\{x_l\} + \#\{x_m\} \geq p + q$, onde $\#\{\cdot\}$ representa a medida discreta ou a cardinalidade do conjunto. Em geral, considera-se $\#\{x_l\} + \#\{x_m\} = 2(p + q)$

Além disso, a solução fundamental, Φ_λ , pode ser tomada como

$$\Phi_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\lambda}|x|), & \text{se } \lambda > 0, \\ -\frac{1}{2\pi} \log(|x|), & \text{se } \lambda = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{-\lambda}|x|), & \text{se } \lambda < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada do segundo tipo, de ordem zero, $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$ é a função de Hänkel do primeiro tipo, de ordem zero, e J_0 , e Y_0 são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Portanto, nosso objetivo é resolver um sistema de colocação como o exposto acima para determinar os coeficientes $\alpha_{i,j}$ e, então, determinar a aproximação da solução particular de (2.4). Além disso, observe que estamos utilizando o Método das Soluções Fundamentais no interior do domínio Ω e na fronteira do domínio $\partial\Omega$.

Observação 2.6. *Note que nas expansões (2.5), (2.6) e (2.7), estão sendo consideradas múltiplas frequências, ou seja, múltiplos valores para λ_j (autovalores do La-*

placiano). Desta forma, quando consideramos múltiplas frequências, obtemos aproximações mais precisas do termo fonte f e da solução do problema direto u , ver [5] e [60]. Estas aproximações são mais precisas devido aos seguintes resultados.

Teorema 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, um conjunto aberto, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \notin \bar{\Omega}$ e $\lambda_j \in I$, para $j = 1, 2, \dots, p$, com $I \subset \mathbb{R}$. Então as funções*

$$\Phi_{\lambda_1}(x - y_1), \Phi_{\lambda_2}(x - y_2), \dots, \Phi_{\lambda_p}(x - y_n)$$

são linearmente independentes.

Demonstração. Ver [60]. □

Teorema 2.2. *Sejam $\hat{\Gamma}$ um conjunto de fontes admissíveis e I um intervalo aberto em $(-\infty, 0]$. Então o espaço*

$$\text{span} \left\{ \Phi_{\lambda}(x - y)|_{\Omega}; y \in \hat{\Gamma}, \lambda \in I \right\}$$

é denso em $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [60]. □

No capítulo 5, vamos aplicar este método para resolução de um problema de salto, também conhecido como problema de *crack*, de detecção de falhas materiais ou ainda problema de interface entre duas estruturas de mesma densidade.

Existem vários trabalhos na literatura relacionada a MFS. Dentre eles podemos citar [41] e [42]. Em [46], Chen, Karageorghis e Yan Li estudam sobre a escolha da melhor localização dos pontos fontes no MFS que levam a uma melhor aproximação a um baixo custo computacional. Com uma aplicação direta na engenharia, podemos citar [45], onde Colaço e Alves propuseram uma metodologia para estimar condutância térmica sem medições intrusivas, através do funcional de reciprocidade e do MFS. Em 2015, Colaço, Alves e Orlande, [44], estenderam esta metodologia para problemas transientes.

2.2 O Algoritmo de Levenberg-Marquardt

Nesta subseção, vamos fazer um breve resumo do algoritmo de Levenberg-Marquardt para otimização de funcionais.

Este algoritmo pode ser encontrado com maiores detalhes em [3] e [53], por exemplo. O algoritmo de Levenberg-Marquardt é um método usado para resolver problemas de minimização por mínimos quadrados não-linear.

Este método foi desenvolvido por Kenneth Levenberg em 1944, ver [57], e, em 1963, foi aprimorado por Donald Marquardt, ver [58]. Além disso, é uma variação do método de Newton, onde é considerado peso.

Um dos objetivos principais deste método é resolver o seguinte problema:

Dados M pares de dados obtidos empiricamente (x_i, y_i) , com $y = y(x)$, o problema consiste em otimizar o conjunto de parâmetros \mathbf{A} da curva $F(x, \mathbf{A})$, tal que o erro cometido (ou o desvio cometido)

$$E(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M (y_i - F(x_i, \mathbf{A}))^2 \quad (2.9)$$

seja mínimo.

Neste procedimento iterativo é necessário dar um valor inicial para o vetor dos parâmetros \mathbf{A} .

Observação 2.7. *Este valor inicial representa uma desvantagem no uso deste algoritmo, pois dependendo da estimativa inicial, o algoritmo pode demorar mais a convergir.*

Em cada passo de iteração, o vetor dos parâmetros $\mathbf{A}^{(k)}$ é substituído por um novo vetor $\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} + \delta^{(k)}$, onde o vetor "incremento" $\delta^{(k)}$ é calculado em cada iteração.

Desta forma, para determinar o vetor $\delta^{(k)}$, as funções $F(x_i, \mathbf{A}^{(k+1)})$ são aproximadas por suas linearizações

$$F(x_i, \mathbf{A}^{(k+1)}) \approx F(x_i, \mathbf{A}^{(k)}) + J_i^{(k)} \delta^{(k)},$$

onde $J_i^{(k)} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}(x_i, \mathbf{A}^{(k)})$ é o vetor gradiente com respeito a \mathbf{A} .

Observação 2.8. *Esta aproximação é feita tomando o polinômio de Taylor de grau 1 de F .*

Com isso, temos a seguinte aproximação

$$E(\mathbf{A}^{(k+1)}) \approx \sum_{i=0}^M \left(y_i - F(x_i, \mathbf{A}^{(k)}) - J_i^{(k)} \delta^{(k)} \right)^2.$$

Como estamos interessados em buscar os parâmetros que minimizam a função $E(\cdot)$, então a derivada, com respeito a δ , de $E(\cdot)$ deve ser zero e, portanto, devemos ter

$$J^{(k)} \cdot \delta^{(k)} = Y - \mathbf{F}(\mathbf{A}^{(k)}),$$

onde $J^{(k)}$ é a matriz Jacobiana cuja i -ésima linha é o vetor $J_i^{(k)}$, $Y = (y_i)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{A}^{(k)}) = (F(x_i, \mathbf{A}^{(k)}))$. Logo, temos o seguinte sistema de equações lineares, que pode ser

resolvido para $\delta^{(k)}$,

$$[(J^{(k)})^T J^{(k)}].\delta^{(k)} = [J^{(k)}]^T [Y - \mathbf{F}(\mathbf{A}^{(k)})],$$

onde $(J^{(k)})^T$ é a matriz transposta de $J^{(k)}$. O método de Levenberg-Marquardt consiste em adicionar um termo de amortecimento $\mu > 0$ no sistema acima, ou seja,

$$[(J^{(k)})^T J^{(k)} + \mu L].\delta^{(k)} = [J^{(k)}]^T [Y - \mathbf{F}(\mathbf{A}^{(k)})],$$

onde L pode ser a matriz identidade ou ainda a matriz diagonal formada pelos elementos da diagonal da matriz $(J^{(k)})^T J^{(k)}$.

O valor do parâmetro μ é ajustado em cada iteração de forma empírica.

Além disso, se a função erro E está diminuindo rapidamente, então podemos tomar μ cada vez menor, donde o método se aproxima do método de Gauss-Newton. Por outro lado, se a função erro E diminui mais lentamente, então podemos tomar valores de μ maiores, donde o método se aproxima do método do Gradiente.

Capítulo 3

O Problema Inverso de Fonte para Equações de Helmholtz

Neste capítulo faremos uma introdução ao tema estudado nesta tese, onde na seção 3.1, vamos apresentar os problemas direto e inverso relacionados às equações de Helmholtz.

Na seção 3.2, apresentamos o funcional de reciprocidade relacionado ao problema inverso de fonte posto para as equações de Helmholtz. Além disso, também apresentamos outro operador integral que será usado para estabelecer, nos próximos capítulos, a nova fórmula do centroide.

Por fim, na seção 3.3, estabeleceremos um resultado que garante a equivalência entre o problema inverso de fonte característica e o problema inverso de salto.

3.1 Apresentação dos Problemas Direto e Inverso

Nesta seção vamos apresentar os problemas direto e inverso associados à equação de Helmholtz.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira, $\partial\Omega$, de classe C^1 . Dado o termo fonte $f \in L^2(\Omega)$ e o dado de Dirichlet $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde estamos considerando os casos $\lambda = 0$ (equação de Laplace), $\lambda = \kappa^2 > 0$ (equação de Helmholtz modificada), e o operador de Helmholtz usual com $\lambda = -\kappa^2 < 0$, com κ denotando o número de onda (ou frequência, no caso de ondas com velocidade de propagação unitária).

O problema (3.1) admite uma única solução $u \in H^1(\Omega)$, a menos de alguns valores

de $\lambda < 0$ que são autovalores do operador de Dirichlet-Laplace para Ω . Além disso, pelo Teorema do Traço, [47], determinamos $\frac{\partial u}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Desta forma, definimos *problema direto* para o operador de Helmholtz como sendo o problema de encontrar $\frac{\partial u}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, com $u \in H^1(\Omega)$, a partir do termo fonte f e do dado de Dirichlet g .

Por outro lado, o *problema inverso* de fonte para este operador é posto da seguinte forma: Dada a condição de Cauchy $\{g, g_\eta\} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, encontrar o termo fonte f e uma função $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_\eta, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Podemos estudar este problema inverso através de alguns operadores. A seguir vamos definir um destes, associado ao Funcional de Reciprocidade.

3.2 O Funcional de Reciprocidade

Nesta seção, estaremos interessados em definir um operador integral relacionado ao problema variacional e estudar algumas propriedades deste.

Para isto, vamos definir o espaço das funções teste. Considere o seguinte espaço:

$$\mathcal{H}_\lambda(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); (-\Delta + \lambda)v = 0\},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira de classe C^1 .

Lema 3.1. *Se λ e λ^2 não são autovalores dos operadores de Laplace e Bilaplace, respectivamente, então,*

$$L^2(\Omega) = \mathcal{H}_\lambda(\Omega) \oplus (-\Delta + \lambda)(H_0^2(\Omega)).$$

Demonstração. Note que, pela Identidade de Green,

$$\int_{\Omega} f v dx = - \int_{\partial\Omega} g_\eta v d\sigma,$$

$\forall v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, e, se $f \in (\mathcal{H}_\lambda(\Omega))^\perp$, então $\int_{\Omega} f v dx = 0$. Desta forma, podemos considerar a seguinte decomposição, $L^2(\Omega) = \mathcal{H}_\lambda(\Omega) \oplus (\mathcal{H}_\lambda(\Omega))^\perp$.

Em [5], é mostrado que $(\mathcal{H}_\lambda(\Omega))^\perp = \overline{(-\Delta + \lambda)(H_0^2(\Omega))}^{L^2(\Omega)}$, ou seja, que $(\mathcal{H}_\lambda(\Omega))^\perp$ é o fecho uniforme, em $L^2(\Omega)$, do espaço $(-\Delta + \lambda)(H_0^2(\Omega))$. \square

Definimos o *Funcional de Reciprocidade* associado ao problema (3.2) como

$$\mathcal{R}[f](v) := \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \eta} - v g_\eta d\sigma, \quad (3.3)$$

para toda função teste $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$.

Observação 3.1. *O conceito deste funcional tem sido bastante estudado nos últimos anos em trabalhos de identificação e reconstrução de fontes, ver [56], [14], [52] e [5].*

Além disso, pela Identidade de Green,

$$\mathcal{R}[f](v) = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \eta} - v g_\eta d\sigma = \int_{\Omega} v f dx, \quad (3.4)$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Desta forma, é possível definir também o seguinte operador

$$F[f](v) := \int_{\Omega} v f dx, \quad (3.5)$$

com $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Assim, a formulação variacional para o problema inverso de fonte consiste em determinar uma função f tal que

$$F[f](v) = \mathcal{R}[f](v), \quad (3.6)$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$.

O operador F será estudado com mais detalhes no capítulo 4.

Observação 3.2. *No caso em que $\lambda = \kappa^2 > 0$ (Helmholtz modificado), também escrevemos $\mathcal{H}_{\kappa^2}(\Omega) = \mathcal{H}_{-\Delta + \kappa^2}(\Omega)$.*

No próximo resultado estabelecemos uma equivalência entre a reconstrução do termo fonte a partir do dado de Cauchy (considerando dado de Dirichlet nulo) e a partir do funcional de reciprocidade.

Teorema 3.1. *O dado de Cauchy unicamente determina a fonte f se, e somente se, f é unicamente determinada pelo funcional $\mathcal{R}[f](v)$, para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, considere as fontes $f_1(x)$ e $f_2(x)$ para o problema (3.2), com dado de Dirichlet nulo. Então, por definição,

$$\mathcal{R}[f_1](v) - \mathcal{R}[f_2](v) = \int_{\partial\Omega} (u_1 - u_2) \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) d\sigma.$$

Desta forma, se f_1 e f_2 geram o dado de Dirichlet nulo na fronteira, então

$$\mathcal{R}[f_1](v) - \mathcal{R}[f_2](v) = \int_{\partial\Omega} (g_\eta^2 - g_\eta^1) v d\sigma,$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Note que para $u \in H^1(\Omega)$, pelo teorema do traço, $\gamma_1 u = g_\eta \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Logo, a integral

$$\int_{\partial\Omega} g_\eta \gamma_0 v d\sigma$$

define um produto de dualidade entre $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$, tendo em vista que $\mathcal{H}_\lambda(\Omega)$ é homeomorfo a $H^{1/2}(\partial\Omega)$, ver [5]. Assim, temos

$$\mathcal{R}[f_1](v) - \mathcal{R}[f_2](v) = \langle g_\eta^2 - g_\eta^1, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Portanto, $\mathcal{R}[f_1] = \mathcal{R}[f_2]$, em $\mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, é equivalente a $g_\eta^2 = g_\eta^1$, em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. \square

Observação 3.3. *Este teorema não garante a unicidade da reconstrução de fonte. Este resultado garante que o problema de determinação de fonte, f , a partir do dado de Neumann ou a partir do funcional de reciprocidade são equivalentes.*

3.3 A Equivalência com o Problema Inverso de Salto

Nesta seção, mostramos que o problema inverso de fonte característica é equivalente a um problema inverso de salto.

Definição 3.1. *Considere um conjunto aberto $\omega \subset \Omega$. Dizemos que ω é um suporte de fonte admissível se ω e $\Omega \setminus \bar{\omega}$ são conexos e regulares.*

Considere o problema (3.1) com fonte da forma

$$f(x) = h\chi_\omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \omega \\ h, & \text{se } x \in \omega, \end{cases}$$

onde $h \neq 0$ é constante e $\omega \subset \Omega$ um suporte admissível. Dizemos, neste caso, que temos uma fonte característica com intensidade h . Note que podemos reescrever este problema como o seguinte problema de transmissão

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u^- = h, & \text{em } \omega, \\ (-\Delta + \lambda)u^+ = 0, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u^+ = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde u^- e u^+ denotam a parte interna e a externa da solução, respectivamente. Seja ϕ uma solução particular da equação

$$(-\Delta + \lambda)\phi = h.$$

Observe que se $\lambda \neq 0$, podemos tomar $\phi = h/\lambda$ e se $\lambda = 0$, podemos tomar $\phi(x) = h\|x\|^2/4$. Logo, podemos dividir (3.7) em dois problemas com condições adicionais sobre a fronteira $\partial\omega$

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u^+ = 0, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u^+ = u^-, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \frac{\partial u^+}{\partial \eta} = \frac{\partial u^-}{\partial \eta}, & \text{sobre } \partial\omega, \\ u^+ = g, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)(u^- - \phi) = 0, & \text{em } \omega, \\ u^- - \phi = u^+ - \phi, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(u^- - \phi) = \frac{\partial u^+}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, & \text{sobre } \partial\omega. \end{cases}$$

Assim, considerando

$$\vartheta = \begin{cases} u^+, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ u^- - \phi, & \text{em } \omega \end{cases} \quad (3.8)$$

temos que, a menos de ϕ , o problema (3.7) é equivalente ao problema inverso de salto

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)\vartheta = 0, & \text{em } \Omega \setminus \partial\omega, \\ [\vartheta] = -\phi, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right] = -\frac{\partial \phi}{\partial \eta}, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \vartheta = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $[\cdot]$ denota o salto sobre $\partial\omega$, representando a diferença entre a parte interna e a parte externa da função.

Portanto, denotando o funcional de reciprocidade deste problema como $\mathcal{R}[\partial\omega](\cdot)$, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Se $\Omega \setminus \bar{\omega}$ é conexo, então $\mathcal{R}[\chi_\omega] = \mathcal{R}[\partial\omega]$. Logo, o problema inverso de fonte característica (3.1) é equivalente ao problema inverso de salto (3.9).*

Demonstração. O funcional de reciprocidade para o problema inverso de salto, com

$v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, aplicando a fórmula de Green ao conjunto conexo $\Omega \setminus \bar{\omega}$, é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\partial\omega](v) &= \int_{\partial\Omega} \left(\vartheta^+ \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial \vartheta^+}{\partial \eta} \right) d\sigma = \\ &= - \int_{\partial\omega^+} \left(\vartheta^+ \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial \vartheta^+}{\partial \eta} \right) d\sigma + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \overbrace{(\vartheta^+ \Delta v - \vartheta \Delta u^+)}^{=0} d\sigma. \end{aligned}$$

Observe que a orientação do vetor normal muda tomando $\partial\omega^-$ como a fronteira de ω , ao invés de $\partial\omega^+$ como parte da fronteira de $\Omega \setminus \bar{\omega}$. Além disso, temos que

$$\int_{\partial\omega^-} \left(\vartheta^- \frac{\partial v}{\partial \eta} - \vartheta \frac{\partial u^-}{\partial \eta} \right) d\sigma = \int_{\omega} \overbrace{(\vartheta^- \Delta v - v \Delta \vartheta^-)}^{=0} d\sigma = 0.$$

Logo, para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\partial\omega](v) &= \int_{\partial\omega^+} \left(\vartheta^+ \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial \vartheta^+}{\partial \eta} \right) d\sigma = - \int_{\partial\omega} \left([\vartheta] \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right] \right) d\sigma \\ &= \int_{\partial\omega} \left(\phi \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\sigma = \int_{\omega} (\phi \Delta v - v \Delta \phi) dx \\ &= \int_{\omega} f v dx = \mathcal{R}[\omega](v) \end{aligned}$$

por (3.4). □

Observação 3.4. *Se $\Omega \setminus \bar{\omega}$ não fosse conexo, esta equivalência não seria verdadeira, tendo em vista que $\partial\omega^+ \neq \partial\omega^- (= \partial\omega)$.*

Capítulo 4

A Reconstrução do Centroide de Fontes Características para Equações de Helmholtz

Neste capítulo, vamos estudar o problema inverso de fonte para equações de Helmholtz, onde estaremos interessados em estudar fontes características e fontes pontuais.

Na seção 4.1, estabelecemos um resultado sobre uma nova fórmula proposta para reconstruir o centro de massa (centroide) do suporte de uma fonte característica de um subconjunto aberto, conexo e limitado do domínio considerado.

Na seção 4.2, apresentamos uma solução analítica, no caso circular, para a equação de Helmholtz modificada, onde esta função será usada para realizarmos experimentos numéricos de reconstrução do centroide.

Por fim, na seção 4.3, estudamos o problema inverso de fonte para equações de Helmholtz para o caso de fontes pontuais.

4.1 O Teorema de Caracterização do Centroide

Nesta seção, apresentamos um novo resultado de determinação de centroide de um conjunto estrelado. Este conjunto é considerado como o suporte de uma fonte característica no problema inverso posto para a equação de Helmholtz modificada ($\lambda > 0$) ou para a equação de Helmholtz ($\lambda < 0$). Além disso, também mostramos que a nova fórmula também é válida para fontes pontuais.

Considere $\kappa = \sqrt{\lambda} \neq 0$, onde $\kappa \in \mathbb{R}^*$, se $\lambda > 0$, e $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se $\lambda < 0$, onde $Re(\kappa)$ representa a parte real do número complexo κ . Considere também o termo fonte $f(x) = \chi_\omega(x)$, onde χ_ω é a função característica de um conjunto aberto, conexo, limitado $\omega \subset \Omega$, cuja fronteira $\partial\omega$, é de classe C^1 , para o problema inverso (3.2),

onde \mathbb{S}^{N-1} denota a fronteira da bola aberta unitária em \mathbb{R}^N .

Logo, tomando a função teste $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, onde $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ e $p \in \mathbb{R}^N$ são arbitrários, o funcional de reciprocidade para o problema (3.2) é dado, por definição,

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}) = \int_{\partial\Omega} g_\kappa(\varphi \cdot \eta) e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} - g_\eta e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} d\sigma.$$

Por outro lado, por (3.4), temos que

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}) = \int_\omega e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} dx. \quad (4.1)$$

Observação 4.1. *Note que*

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}) = e^{-\kappa\varphi \cdot p} \mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot x}).$$

Desta forma, é possível determinar uma mudança de variáveis tais que $p \in \mathbb{R}^N$ seja a origem de um novo sistema de coordenada. Logo, definimos, para $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$,

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi) := \mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot x}).$$

No que se segue, vamos supor que a origem do sistema de coordenadas, p , é o centroide de um conjunto estrelado $\omega \subset \Omega$, cuja fronteira, $\partial\omega$, é parametrizada por uma função $R : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, em $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$.

Assim, por (4.1),

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}) = \int_\omega e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} dx = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.$$

Por outro lado, por (3.5), podemos reescrever o operador F como

$$F[R](\varphi) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.$$

Logo, temos que

$$F[R](\varphi) = \mathcal{R}[\chi_\omega](e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}) = e^{-\kappa\varphi \cdot p} \mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi), \quad (4.2)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Proposição 4.1. *Seja $\omega \subset \Omega$ um conjunto estrelado, cuja fronteira, $\partial\omega$, é parametrizada pela função $R \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Então*

$$F[R](\varphi) = F[R](-\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Demonstração. De fato, seja $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ uma direção arbitrária. Considere os conjuntos

$$\mathbb{S}_{\pm}^{\varphi} := \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; \pm\varphi \cdot \theta > 0\}$$

e

$$\mathbb{S}_0^{\varphi} := \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; \varphi \cdot \theta = 0\}.$$

Logo, $\mathbb{S}^{N-1} = \mathbb{S}_{-}^{\varphi} \cup \mathbb{S}_0^{\varphi} \cup \mathbb{S}_{+}^{\varphi}$ e, então,

$$\begin{aligned} F[R](\varphi) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}_{+}^{\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta + \int_{\mathbb{S}_0^{\varphi}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}_{-}^{\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} F[R](-\varphi) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho(-\varphi)\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}_{+}^{-\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta + \int_{\mathbb{S}_0^{-\varphi}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}_{-}^{-\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Assim, como $\mathbb{S}_{\pm}^{-\varphi} = \mathbb{S}_{\mp}^{\varphi}$ e $\mathbb{S}_0^{-\varphi} = \mathbb{S}_0^{\varphi}$, então

$$\int_{\mathbb{S}_{+}^{-\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta = \int_{\mathbb{S}_{-}^{\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta,$$

e

$$\int_{\mathbb{S}_{-}^{-\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta = \int_{\mathbb{S}_{+}^{\varphi}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\varphi\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.$$

Portanto,

$$F[R](\varphi) = F[R](-\varphi).$$

Desta forma, como φ é arbitrário, temos que $F[R](\varphi) = F[R](-\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. \square

Observe que, pela proposição 4.1 e por (4.2),

$$e^{-\kappa\varphi\cdot p} \mathcal{R}[\chi_{\omega}](\varphi) = e^{\kappa\varphi\cdot p} \mathcal{R}[\chi_{\omega}](-\varphi).$$

Portanto,

$$e^{2\kappa\varphi \cdot p} = \frac{\mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi)}{\mathcal{R}[\chi_\omega](-\varphi)},$$

ou seja,

$$\varphi \cdot p = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi)}{\mathcal{R}[\chi_\omega](-\varphi)} \right). \quad (4.3)$$

Desta forma, estabelecemos o seguinte resultado novo de caracterização e identificação do centroide de suportes estrelados no problema inverso de fonte.

Teorema 4.2. *Seja $\omega \subset \Omega$ um conjunto estrelado e seja $f(x) = \chi_\omega(x)$ o termo fonte para o problema inverso (3.2). Então o centroide, p , de ω pode ser determinado por*

$$\varphi \cdot p = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi)}{\mathcal{R}[\chi_\omega](-\varphi)} \right), \quad (4.4)$$

onde $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Corolário 4.1. *Sejam $f_1 = \chi_{\omega_1}$ e $f_2 = \chi_{\omega_2}$ duas fontes características para o problema inverso (3.2), com $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$ subconjuntos estrelados. Se estas fontes geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira, então estas fontes possuem o mesmo centroide determinado por (4.4).*

Demonstração. De fato, sejam p_1 e p_2 centroides dos conjuntos ω_1 e ω_2 , respectivamente. Se χ_{ω_1} e χ_{ω_2} geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira, então estas fontes geram o mesmo funcional de reciprocidade com função teste exponencial, ou seja,

$$\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) = \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi),$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Então, pelo teorema, $\varphi \cdot p_1 = \varphi \cdot p_2$, para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Portanto, $p_1 = p_2$. \square

Observação 4.2. *Note que a volta do teorema 4.2 não é verdadeira. De fato, se as fontes χ_{ω_1} e χ_{ω_2} possuem o mesmo centroide, então não é verdade que estas fontes geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira ou o mesmo funcional de reciprocidade. Se estas fontes possuem o mesmo centroide, então é verdade que*

$$\frac{\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi)}{\mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)} = \frac{\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](-\varphi)}{\mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](-\varphi)},$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

No caso em que duas fontes características χ_{ω_1} e χ_{ω_2} possuem o mesmo centroide, com R_1 e R_2 parametrizando as fronteiras $\partial\omega_1$ e $\partial\omega_2$, respectivamente, então temos o seguinte resultado sobre o comportamento do operador $F[\cdot]$.

Teorema 4.3. *Dados $R_1, R_2 \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$, então existe uma constante $C = C(N, R_1, R_2) > 0$, tal que*

$$\|F[R_1] - F[R_2]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C\|R_1 - R_2\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})},$$

ou seja, o operador F é contínuo em $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$.

Demonstração. Sejam R_1, R_2 parametrizações $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$ das fronteiras dos conjuntos $\omega_1 \subset \Omega$ e $\omega_2 \subset \Omega$, respectivamente, com o mesmo centroide. Note que

$$|F[R_1](\varphi) - F[R_2](\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{R_2(\theta)}^{R_1(\theta)} e^{\kappa r \varphi \cdot \theta} r^{N-1} dr d\theta \right|.$$

Considerando a seguinte mudança de coordenadas para a integral acima

$$r = \rho(R_1(\theta) - R_2(\theta)) + R_2(\theta),$$

temos

$$\begin{aligned} |F[R_1](\varphi) - F[R_2](\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R_1(\theta) - R_2(\theta)) G_\varphi(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1(\theta) - R_2(\theta)| |G_\varphi(\theta)| d\theta, \end{aligned}$$

onde

$$G_\varphi(\theta) := \int_0^1 e^{\kappa(\rho(R_1(\theta) - R_2(\theta)) + R_2(\theta))\varphi \cdot \theta} [\rho(R_1(\theta) - R_2(\theta)) + R_2(\theta)]^{N-1} d\rho.$$

Como $|R_1(\theta) - R_2(\theta)| < \text{diam}(\Omega)$ e $\rho \leq 1$, onde $\text{diam}(\Omega)$ denota o diâmetro de Ω , temos que

$$|\rho(R_1(\theta) - R_2(\theta)) + R_2(\theta)|^{N-1} \leq (2\text{diam}(\Omega))^{N-1},$$

tendo em vista que $R_2 < \text{diam}(\Omega)$ e $|R_1(\theta) - R_2(\theta)| < \text{diam}(\Omega)$. Analogamente, como $\varphi \cdot \theta \leq 1$, temos que

$$\kappa(\rho(R_1(\theta) - R_2(\theta)) + R_2(\theta))\varphi \cdot \theta \leq 2\kappa\text{diam}(\Omega).$$

Desta forma,

$$|G_\varphi(\theta)| \leq (2\text{diam}(\Omega))^{N-1} e^{2\kappa\text{diam}(\Omega)},$$

e, então,

$$\|F[R_1] - F[R_2]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq \|R_1 - R_2\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \left((2\text{diam}(\Omega))^{N-1} e^{2\kappa\text{diam}(\Omega)} \right) \mu(\mathbb{S}^{N-1}),$$

onde $\mu(\mathbb{S}^{N-1})$ denota a medida de Lebesgue de \mathbb{S}^{N-1} .

Portanto, denotando $C := (2\text{diam}(\Omega))^{N-1} e^{2\kappa\text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1}) > 0$, obtemos

$$\|F[R_1] - F[R_2]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C \|R_1 - R_2\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}.$$

□

O próximo resultado é sobre a coercividade do operador $F[\cdot]$.

Teorema 4.4. *Se $\omega \subset \Omega$ é um conjunto estrelado com fronteira parametrizada por uma função $R \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$, então $F[R] \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Além disso, vale a seguinte desigualdade*

$$\|F[R]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq C \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N,$$

onde a constante C é dada por $C = e^{-\kappa\text{diam}(\Omega)}/N > 0$.

Demonstração. De fato, observe que a função $h(x) := e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)}$ é contínua. Como $\bar{\omega} \subset \Omega$, com Ω limitado, então $\bar{\omega}$ é compacto, além de conexo, por ser estrelado. Logo, h assume, pelo menos, um máximo e um mínimo em $\bar{\omega}$.

Desta forma, considerando um caminho contínuo $\gamma(t), t \in [0, 1]$, com $\gamma([0, 1]) \subset \bar{\omega}$, ligando estes dois pontos, então, pelo teorema do valor médio para integrais, ver [59], existe $\bar{x} \in \gamma((0, 1))$, tal que

$$F[R](\varphi) = e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta. \quad (4.5)$$

Assim, obtemos

$$F[R](\varphi) = e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}} \int_{\omega} 1 dx = \mu(\omega) e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}} > 0,$$

ou seja,

$$\|F[R]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |F[R](\varphi)| d\varphi = \mu(\omega) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}} d\varphi < \infty.$$

Por outro lado, por (4.5),

$$\begin{aligned} F[R](\varphi) &= e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \frac{e^{\kappa\bar{\rho}\varphi \cdot \bar{\theta}}}{N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R(\theta))^N d\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Logo, como a função $a \mapsto a^N$ é convexa, visto que $N = \dim(\mathbb{R}^N) \in \mathbb{Z}_*^+$, pela

desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned} F[R](\varphi) &\geq \frac{e^{\kappa\bar{\rho}\varphi\cdot\bar{\theta}}}{N\mu(\mathbb{S}^{N-1})} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} R(\theta) d\theta \right)^N \\ &= \frac{e^{\kappa\bar{\rho}\varphi\cdot\bar{\theta}}}{N\mu(\mathbb{S}^{N-1})} \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desta forma, como $-1 \leq \varphi \cdot \bar{\theta}$ e $\bar{\rho} \leq \text{diam}(\Omega)$, então por (4.7),

$$\|F[R]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq \frac{e^{-\kappa\text{diam}(\Omega)}}{N\mu(\mathbb{S}^{N-1})} \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N \int_{\mathbb{S}^{N-1}} 1 d\sigma = \frac{e^{-\kappa\text{diam}(\Omega)}}{N} \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N.$$

Portanto, definindo a constante $C = C(N) := \frac{e^{-\kappa\text{diam}(\Omega)}}{N} > 0$, obtemos

$$\|F[R]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq C \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N.$$

□

Observação 4.3. *Note que, pelo teorema 4.4 e por (4.1), temos que*

$$\|\mathcal{R}[\chi_\omega]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq C \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N,$$

ou seja,

$$\|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq \frac{1}{C^{1/N}} \|\mathcal{R}[\chi_\omega]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^{1/N}.$$

Desta forma, dependendo do valor da constante C , é possível estabelecer um argumento do tipo ponto-fixo, tendo em vista que é possível calcular numericamente o funcional de reciprocidade e queremos determinar uma aproximação da parametrização da fronteira $\partial\omega$, R .

Observação 4.4. *Outra característica que é possível obter é o raio efetivo ou raio médio, r_M . Este raio é obtido aproximando a função teste do problema de Helmholtz modificado pela função teste do problema de Laplace identicamente igual a 1. Desta forma,*

$$v \simeq 1 \Rightarrow \mathcal{R}[\chi_\omega](v) \simeq \mathcal{R}_L[f_p](1),$$

onde $\mathcal{R}[\chi_\omega](v)$ é o funcional de reciprocidade para o problema inverso de fonte para a equação de Helmholtz modificada, com função teste v , e $\mathcal{R}_L[f_p](1)$ é o funcional de reciprocidade para o problema inverso de fonte pontual para equação de Laplace, com função teste identicamente igual a 1. O problema com fonte pontual será estudado melhor na seção 4.3. Logo,

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](v) \simeq - \int_{\omega} 1 dx = -\mu(\omega) \simeq -\alpha = \mathcal{R}_L[f_p](1),$$

onde $\mu(\omega)$ é a medida de Lebesgue do conjunto $\omega \subset \Omega$. Desta forma, obtemos a seguinte aproximação para o caso bidimensional

$$\mu(\omega) \approx \pi r_M^2 \simeq \alpha \implies r_M \simeq \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}. \quad (4.8)$$

O raio médio, r_M , é importante porque com esta informação e com o centroide do conjunto estrelado é possível determinar uma estimativa inicial para o processo iterativo que busca a melhor aproximação para o conjunto estrelado como foi abordado no capítulo 5.

4.2 Experimentos Numéricos para Determinação do Centroide

Nesta seção vamos apresentar uma solução particular da equação de Helmholtz modificada, na qual será usada para comparar com a solução numérica obtida pelo método das soluções fundamentais. A seguir, vamos apresentar alguns experimentos numéricos no qual será determinado o centroide para diferentes tipos de suportes para a fonte característica.

4.2.1 Experimento, via MFS, com solução analítica no caso circular

Nesta subseção vamos estudar o problema de determinação do centroide no caso circular. Considere, para $\lambda = \kappa^2 > 0$, com $\kappa > 0$, a equação de Helmholtz com uma fonte característica χ_ω , onde $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, dada por

$$(-\Delta + \kappa^2)u = \chi_\omega, \quad \text{em } \Omega. \quad (4.9)$$

Vamos estudar o caso em que ω seja um círculo, centrado em um ponto (x_c, y_c) , com raio \tilde{r} , e que o domínio Ω seja também dado por um círculo, centrado na origem, de raio $R > \tilde{r}$. Note que, neste caso, o centro de massa (centroide) de ω coincide com o centro (x_c, y_c) .

Considere a função radial Q , dada por

$$Q(x, y) = Q(r) = \begin{cases} \frac{I_1(\tilde{r}\kappa)K_0(\kappa r) + I_0(\kappa r)K_1(\tilde{r}\kappa)}{\kappa^2(I_1(\tilde{r}\kappa)K_0(\tilde{r}\kappa) + I_0(\tilde{r}\kappa)K_1(\tilde{r}\kappa))}, & \text{se } r > \tilde{r}, \\ 1/\kappa^2, & \text{se } r \leq \tilde{r}, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ e I_α e K_α são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo de ordem α , respectivamente.

Lema 4.1. A função $Q(x, y) = Q(r)$, dada por (4.10), é uma solução particular da equação (4.9).

Demonstração. De fato, se $r \leq \tilde{r}$, então $1/\kappa^2$ satisfaz $(-\Delta + \kappa^2)u = 1$. No caso em que $\tilde{r} < r < R$, podemos usar coordenadas polares e as propriedades das funções de Bessel modificadas, [65], [66], [55], para concluir que

$$\Delta I_0(\kappa r) = \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2}(\kappa r) + \frac{1}{r} \frac{\partial I_0}{\partial r}(\kappa r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} I_0(\kappa r) = \kappa^2 I_0(\kappa r)$$

e

$$\Delta K_0(\kappa r) = \frac{\partial^2 K_0}{\partial r^2}(\kappa r) + \frac{1}{r} \frac{\partial K_0}{\partial r}(\kappa r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} K_0(\kappa r) = \kappa^2 K_0(\kappa r).$$

Logo, $-\Delta Q + \kappa^2 Q = 0$, se $\tilde{r} < r < R$. Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow \tilde{r}^+} Q(r) = 1/\kappa^2 = \lim_{r \rightarrow \tilde{r}^-} Q(r)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \tilde{r}^+} \frac{\partial Q}{\partial \eta}(r) = \lim_{r \rightarrow \tilde{r}^+} \frac{dQ}{dr}(r) = 0 = \lim_{r \rightarrow \tilde{r}^-} \frac{dQ}{dr}(r).$$

□

A função Q , dada por (4.10), será utilizada no experimento a seguir para comparação com a solução do problema direto obtida pelo método das Soluções Fundamentais.

Experimento 4.2.1. Neste experimento bidimensional foi considerado que $\lambda = 1$ em (7.2) e, além disso, foi considerado $\Omega = B_1(0, 0)$ e $\omega = B_{0.3}(-0.3, -0.2)$, ou seja, ω é a bola aberta, centrada no ponto $(-0.3, -0.2)$, com raio 0.3. Neste caso, o centroide do conjunto ω coincide com seu centro, ou seja, o centroide é o ponto $(-0.3, -0.2)$.

Note que, pelo lema 4.1, temos uma solução analítica radial Q , dada por (4.10), considerando $\tilde{r} = 0.3$, $R = 1$ e $(x_c, y_c) = (-0.3, -0.2)$. Além disso, foram considerados 629 pontos em cada fronteira física e 252 pontos de fonte (fronteiras fictícias). Assim, foi resolvido o problema direto, usando o método das soluções fundamentais, ver seções 2.1 e 5.1, considerando como dado de Dirichlet a projeção de Q em $\partial\Omega$, i. e., $\gamma_0 Q$, em $\partial\Omega$.

Portanto, como mostrado na figura 4.1, a solução obtida pelo MFS, $u(x, y)$, mostrou-se muito próxima da solução analítica Q , tendo em vista que o erro foi da ordem de 10^{-6} .

Para determinação do centroide, o funcional de reciprocidade foi calculado considerando o dado de Cauchy em função da representação em série da solução do problema direto, u . Assim, definimos o dado de Dirichlet e de Neumann como $\gamma_0 u$ e $\gamma_1 u$, sobre $\partial\Omega$, respectivamente.

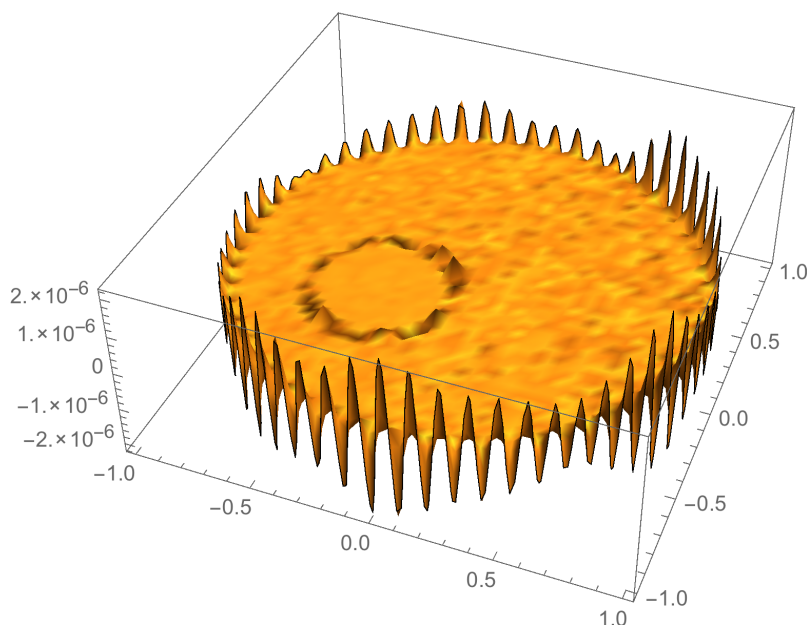


Figura 4.1: Erro entre a solução analítica, Q , e a solução pelo MFS

Com isto, o centroide determinado está bem próximo do original, conforme tabela 4.1, onde o erro da posição foi calculado pela norma euclídeana da diferença entre o centroide original e o calculado. Nesta tabela também foi considerada a ação de ruído relativo de 1%, 5% e 10% no dado de Cauchy. Neste caso, foi considerado o mesmo ruído tanto no dado de Dirichlet, quanto no dado de Neumann.

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	(-0.3,-0.2)	3.06719×10^{-9}
Ruído 1%	(-0.309532, -0.190297)	0.0136012
Ruído 5%	(-0.324528, -0.144536)	0.0606459
Ruído 10%	(-0.368817, -0.135365)	0.0944107

Tabela 4.1: Erro do Centroide - Caso Circular

Na tabela 4.2, foi fixado ruído de 1% sobre o dado de Dirichlet e feito o ruído sobre o dado de Neumann variar até 10%.

Por outro lado, na tabela 4.3, foi fixado ruído de 10% sobre o dado de Dirichlet e feito o ruído sobre o dado de Neumann variar até 10%. Este resultado foi pior do que quando considerado ruído de 1% no dado de Dirichlet.

Desta forma, aparentemente, o dado de Dirichlet parece ter uma influência maior sobre a determinação do centroide.

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	(-0.296432, -0.209535)	0.0101805
Ruído 1%	(-0.316809, -0.183237)	0.0237395
Ruído 5%	(-0.332893, -0.181616)	0.0376822
Ruído 10%	(-0.343313, -0.181448)	0.0471187

Tabela 4.2: Erro do Centroide - Caso Circular - Ruído Dirichlet fixo 1%

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	(-0.238834, -0.206423)	0.0615019
Ruído 1%	(-0.33233, -0.126357)	0.0804273
Ruído 5%	(-0.335185, -0.118567)	0.0887092
Ruído 10%	(-0.264065, -0.0816816)	0.123655

Tabela 4.3: Erro do Centroide - Caso Circular - Ruído Dirichlet fixo 10%

4.2.2 Experimentos Numéricos para Obtenção do Centroide - Caso Não-Circular

Nesta subseção vamos estudar o problema de determinação do centroide para diferentes tipos de suportes estrelados, não circulares. O objetivo é verificar a eficiência da nova fórmula apresentada no teorema 4.2.

Nos experimentos 4.2.2 e 4.2.3, foi considerado $\lambda = 1$ (equação de Helmholtz). No experimento 4.2.4, foi considerado $\lambda = -1$ (equação de Helmholtz modificada). Além disso, foi imposto ruído relativo sobre os pontos de colocação do domínio, ou seja, a fronteira $\partial\Omega$ foi discretizada e o funcional de reciprocidade, agora discreto, foi determinado com o dado de Dirichlet em cada elemento desta lista de pontos e multiplicado por uma função randômica do tipo $(1 + \varepsilon_1)$, onde ε_1 é o ruído considerado. Esta função randômica é uma função pré-definida no *software Mathematica*, onde a entrada dela é o intervalo onde será tomado ε_1 .

Experimento 4.2.2. Neste experimento foi considerado o domínio Ω como sendo o interior da elipse parametrizada por $R(t) = (\cos(t), 0.5 \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, e o suporte da fonte como o conjunto estrelado ω , com centroide $(0.3, -0.1)$, cuja fronteira, $\partial\omega$, é parametrizada por $r(t) = (0.3 + (0.2 - 0.1 \cos(7t)) \cos(t), -0.1 + (0.2 - 0.1 \cos(7t)) \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, como mostrado na figura 4.2.

De forma análoga ao experimento 4.2.1, foram considerados 629 pontos de colocação e 252 pontos de fonte.

Observe que, neste caso, como não temos uma solução analítica para o problema, não foi possível realizar uma comparação entre as soluções analítica e numérica, como no experimento anterior.

Neste problema, consideramos o problema direto com dado de Dirichlet nulo. O

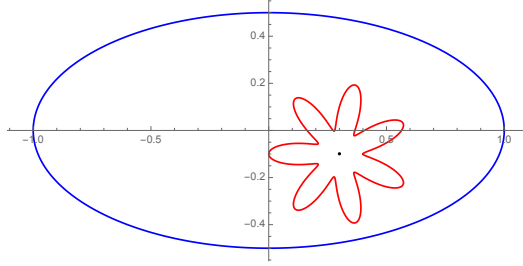


Figura 4.2: Domínio do Problema - 7-Estrelado dentro da Elipse

centroide foi determinado como no último experimento, onde consideramos que os dados de Dirichlet e Neumann possuísem o mesmo ruído relativo. O resultado obtido pode ser visto na tabela 4.4.

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	(0.300056, -0.0999748)	6.13069×10^{-5}
Ruído 1%	(0.300221, -0.100107)	0.000245237
Ruído 5%	(0.298224, -0.100325)	0.00180583
Ruído 10%	(0.297488, -0.101851)	0.00312016

Tabela 4.4: Erro do Centroide - Caso 7-Estrelado

Experimento 4.2.3. Neste experimento foi considerado o domínio Ω como sendo o círculo unitário, centrado na origem, e o suporte da fonte ω como o interior do quadrado, centrado em $(x_c, y_c) = (0.4, -0.2)$, parametrizado por $r(t) = (x_c, y_c) + \xi(t)(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{0.3}{\cos(t)}, & \text{se } 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{0.3}{\sin(t)}, & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}, \\ \frac{-0.3}{\cos(t)}, & \text{se } \frac{3\pi}{4} \leq t < \frac{5\pi}{4}, \\ \frac{-0.3}{\sin(t)}, & \text{se } \frac{5\pi}{4} \leq t < \frac{7\pi}{4}, \\ \frac{0.3}{\cos(t)}, & \text{se } \frac{7\pi}{4} \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4.11)$$

como mostrado na figura 4.3.

Neste experimento, novamente foi considerado dado de Dirichlet nulo no problema direto. Entretanto, diferentemente dos outros experimentos, neste caso consideramos 200 pontos de colocação e 100 pontos de fonte, tendo em vista que os resultados já foram satisfatórios.

Assim, o centroide foi determinado como nos últimos experimentos, considerando ruído relativo somente sobre o dado de Neumann. Os resultados obtidos estão mos-

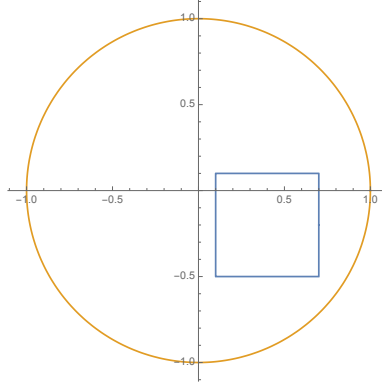


Figura 4.3: Domínio do Problema - Caso Quadrado dentro do Círculo

trados na tabela 4.5.

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	(0.400002, -0.199989)	0.0000115749
Ruído 1%	(0.399996, -0.199778)	0.000221949
Ruído 5%	(0.401539, -0.201175)	0.0019363
Ruído 10%	(0.397216, -0.196766)	0.00426754

Tabela 4.5: Erro do Centroide - Caso Quadrado

Experimento 4.2.4. Neste experimento, foi considerado o domínio Ω como o interior do círculo unitário, centrado na origem, parametrizado por $R(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$, e o suporte da fonte ω como o conjunto estrelado, com centroide $(x_c, y_c) = (0.4, -0.2)$, cuja fronteira é parametrizada por $r(t) = (x_c, y_c) + (0.3 - 0.15 \cos(3t))(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$, como mostrado na figura 5.11a.

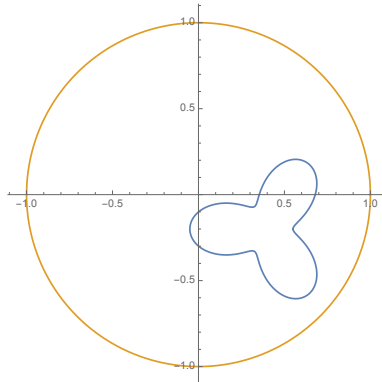


Figura 4.4: Domínio do Problema - 3-Estrelado dentro círculo, κ complexo

Além disso, neste experimento, consideramos $\kappa = \sqrt{-1} = i$, um número complexo. Consequentemente, a solução fundamental considerada no método MFS, ver (2.8),

será dada por

$$\Phi_{\kappa}(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{-\kappa^2}|x|),$$

onde $H_0^{(1)}$ é a função de Hänkel do primeiro tipo de ordem zero e, então, os resultados obtidos também serão números complexos. Como no último experimento, consideramos 200 pontos de colocação e 100 pontos de fonte, com dado de Dirichlet nulo no problema direto.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, como mostrado na tabela 4.6, onde o erro entre o centroide exato e o calculado foi medido com a parte real destes valores, tendo em vista que as partes imaginárias foram muito pequenas.

	Centroide Calculado	Erro da Posição
Ruído 0%	$(0.400697 + 9.46942 \times 10^{-7}i, -0.2 + 6.43473 \times 10^{-8}i)$	0.000696922
Ruído 1%	$(0.400715 + 9.52632 \times 10^{-7}i, -0.199901 + 1.10503 \times 10^{-8}i)$	0.000722001
Ruído 5%	$(0.398665 + 7.72773 \times 10^{-7}i, -0.201086 - 3.34906 \times 10^{-8}i)$	0.00172124
Ruído 10%	$(0.396216 + 9.64432 \times 10^{-7}i, -0.198987 - 4.3447 \times 10^{-7}i)$	0.00391735

Tabela 4.6: Erro do Centroide - Caso κ complexo

Portanto, como pôde ser observado nos experimentos, a nova fórmula proposta para determinação do centroide mostrou-se bastante eficiente.

4.3 O Caso de Fontes Pontuais

Nesta seção vamos estudar o problema inverso de fonte para uma única fonte pontual e para uma combinação linear de fontes pontuais.

Considere o problema inverso de Helmholtz com a única fonte pontual do tipo

$$f_p(x) = \alpha \delta_p(x),$$

onde $\delta_p(x)$ é a distribuição delta de Dirac, centrada no ponto $p \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha > 0$ é a intensidade desta fonte. Desta forma, tomando $v_{\varphi}(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$ em (3.6), com $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$, e $\kappa = \sqrt{\lambda}$,

$$\mathcal{R}[f_p](\varphi) := \mathcal{R}[f_p](v_{\varphi}) = \alpha e^{\kappa\varphi \cdot p}, \forall \varphi \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Assim, como $\mathcal{R}[f_p](-\varphi) = \alpha e^{-\kappa\varphi \cdot p}$, a intensidade da fonte pode ser determinada da seguinte forma

$$\alpha = \sqrt{\mathcal{R}[f_p](\varphi) \cdot \mathcal{R}[f_p](-\varphi)} > 0. \quad (4.12)$$

Observe que a intensidade da fonte pontual não depende da direção escolhida $\varphi \in$

\mathbb{S}^{N-1} , como esperado. Além disso, como

$$\frac{\mathcal{R}[f_p](\varphi)}{\mathcal{R}[f_p](-\varphi)} = e^{2\kappa\varphi \cdot p},$$

a posição da fonte pontual pode ser determinada da seguinte forma

$$\varphi \cdot p = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[f_p](\varphi)}{\mathcal{R}[f_p](-\varphi)} \right), \quad (4.13)$$

onde $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Note que a posição desta fonte pode ser determinada tomando φ como os vetores da base canônica de \mathbb{R}^N .

Observe que estabelecemos os seguintes resultados de caracterização e unicidade de uma única fonte pontual.

Teorema 4.5. *Suponha que o termo fonte do problema inverso (3.2) é dado por $f(x) = \alpha\delta_p(x)$, com $\alpha > 0$ e $p \in \mathbb{R}^N$. Então a intensidade da fonte, α , é dada por (4.12) e a posição da fonte, p , é dada por (4.13).*

Corolário 4.2. *Considere duas fontes pontuais para o problema inverso (3.2), dadas por $f_1(x) = \alpha_1\delta_{p_1}(x)$ e $f_2(x) = \alpha_2\delta_{p_2}(x)$. Se f_1 e f_2 geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira, então $f_1 = f_2$.*

Demonstração. De fato, se f_1 e f_2 geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira, então estas fontes geram o mesmo funcional de reciprocidade com função teste exponencial, ou seja,

$$\mathcal{R}[f_1](\varphi) = \mathcal{R}[f_2](\varphi),$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Então, pelo teorema 4.5,

$$\mathcal{R}[f_1](\varphi) \cdot \mathcal{R}[f_1](-\varphi) = \mathcal{R}[f_2](\varphi) \cdot \mathcal{R}[f_2](-\varphi)$$

e

$$\varphi \cdot p_1 = \varphi \cdot p_2,$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Portanto, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $p_1 = p_2$. □

Observação 4.5. *Note que, por (4.13) e (4.4), obtemos a mesma expressão de caracterização tanto do centroide de fontes características, quanto da posição de uma única fonte pontual.*

Considere, agora, o termo fonte definido como combinação linear finita de fontes pontuais da forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{p_i}(x).$$

Para este tipo de fonte, é possível estabelecer um resultado de unicidade, apresentado abaixo. Este resultado foi mostrado por El Badia e Nara, [9].

Teorema 4.6. *Considere as fontes para o problema inverso (3.2) dadas por $f_1(x) = \sum_{i=1}^{M_1} \alpha_i \delta_{p_i}(x)$ e $f_2(x) = \sum_{j=1}^{M_2} \beta_j \delta_{q_j}(x)$, onde p_i e q_j são distintos entre si. Se f_1 e f_2 geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira, então $f_1 = f_2$, ou seja, $M_1 = M_2$, $\alpha_i = \beta_i$ e $p_i = q_i$, para $i = 1, 2, \dots, M_1$.*

Demonstração. Seja u_i solução do problema inverso (3.2), com termo fonte f_i , $i = 1, 2$. Logo, considerando as funções $u := u_1 - u_2$ e $F := f_1 - f_2$, nós temos que u é solução de

$$\begin{cases} (-\Delta + \kappa^2)u = F, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, pelo teorema de Holmgren, a partir de

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\partial\Omega} = 0,$$

devemos ter $u = 0$ em $\Omega \setminus (\{p_i; i = 1, 2, \dots, M_1\} \cup \{q_j; j = 1, 2, \dots, M_2\})$, ou seja, u deverá ser uma combinação linear finita de deltas de Dirac centradas nos pontos $\{p_i; i = 1, 2, \dots, M_1\} \cup \{q_j; j = 1, 2, \dots, M_2\}$ e de suas derivadas. Além disso, $F \in H^{-1-s}(\Omega)$, para $s > 0$, ver, por exemplo, [9].

Por outro lado, se $F \in H^{-1-s}(\Omega)$, para $s > 0$, então $u \in H^{1-s}(\Omega)$, para $s > 0$. Entretanto, u é combinação linear finita de deltas de Dirac, pertencendo, portanto, à mesma classe de F , ou seja, $H^{-1-s}(\Omega)$, com $s > 0$. Desta forma, isto somente é possível se $F \equiv 0$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{M_1} \alpha_i \delta_{p_i}(x) - \sum_{j=1}^{M_2} \beta_j \delta_{q_j}(x) \equiv 0.$$

Portanto, como as posições são distintas e as deltas de Dirac são linearmente independentes, obtemos

$$M_1 = M_2, \quad \alpha_i = \beta_i, \quad \text{e} \quad p_i = q_i,$$

para $i = 1, 2, \dots, M_1$, ou seja, $f_1 = f_2$. □

Capítulo 5

A Reconstrução da Fronteira de Fontes Características usando o Método das Soluções Fundamentais

Ao estudarmos um problema inverso com fonte característica, existem duas informações importantes que esperamos reconstruir: O baricentro (centroide) do suporte da fonte e a função que parametriza a fronteira do suporte.

O problema de reconstrução do centroide foi estudado no capítulo 4, onde foi fornecida uma nova fórmula para a sua reconstrução.

O problema de reconstrução da fronteira do suporte vem sendo estudado por muitos autores através de vários métodos numéricos para realizar uma estimativa deste termo, tendo em vista que a unicidade é um problema em aberto.

Na seção 5.1, é estudado o problema direto com fonte característica para equações de Helmholtz. Este problema é estudado através do método das soluções fundamentais (MFS) para determinação de sua solução numérica.

Na seção 5.2, é construído um funcional relacionado ao "erro" cometido na aproximação do suporte original da fonte característica.

Desta forma, a solução numérica pelo MFS e o funcional "erro cometido" serão utilizados na seção 5.3, onde são realizados experimentos numéricos sobre reconstrução da fronteira do suporte do termo fonte, através de um método numérico já estabelecido.

5.1 O Problema Direto via MFS

Considere o problema direto associado à equação de Helmholtz

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

onde o termo fonte $f = h\chi_\omega$, com $h \neq 0$ constante e $\omega \subset \Omega$ é aberto, conexo e limitado, com fronteira de classe C^1 .

Pela seção 3.3, sabemos que o problema (5.1) pode ser escrito como o seguinte problema de transmissão

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u^- = h, & \text{em } \omega, \\ (-\Delta + \lambda)u^+ = 0, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u^+ = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde u^- e u^+ denotam a parte interna e a externa da solução, respectivamente. Além disso, se ϕ for uma solução particular da equação

$$(-\Delta + \lambda)\phi = h,$$

onde podemos tomar

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0, \\ h \frac{\|x\|^2}{4}, & \text{se } \lambda = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

então, pelo Teorema 3.2, o problema (5.2) é equivalente ao problema de salto

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)\vartheta = 0, & \text{em } \Omega \setminus \partial\omega, \\ [\vartheta] = -\phi, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} \right] = -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}, & \text{sobre } \partial\omega, \\ \vartheta = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde

$$\vartheta = \begin{cases} u^+, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u^- - \phi, & \text{em } \omega. \end{cases}$$

Desta forma, vamos estudar o problema (5.4) para determinar sua solução através do Método das Soluções Fundamentais, ou seja, através deste método, vamos determinar ϑ^+ e ϑ^- , supondo ϕ da forma (5.3), e, conseqüentemente, determinar u^+ e u^- .

Para isto, considere as seguintes expansões em solução fundamental

$$\vartheta^-(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - c_i|),$$

com $c_i \in \gamma$, e

$$\vartheta^+(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j^I \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - a_j|) + \sum_{l=1}^r \beta_l^E \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - b_l|),$$

com $a_j \in \Gamma^I$ e $b_l \in \Gamma^E$, onde Φ_λ é uma solução fundamental da equação de Helmholtz, ou seja, Φ_λ satisfaz

$$(-\Delta + \lambda)\Phi_\lambda = \delta,$$

onde δ é a distribuição Delta de Dirac. Pelo capítulo 2, sabemos que as curvas γ, Γ^I e Γ^E são chamadas de *fronteiras fictícias* (ou *curvas fictícias*) do problema e os conjuntos de pontos

$$\{c_i, i = 1, 2, \dots, p\} \subset \gamma,$$

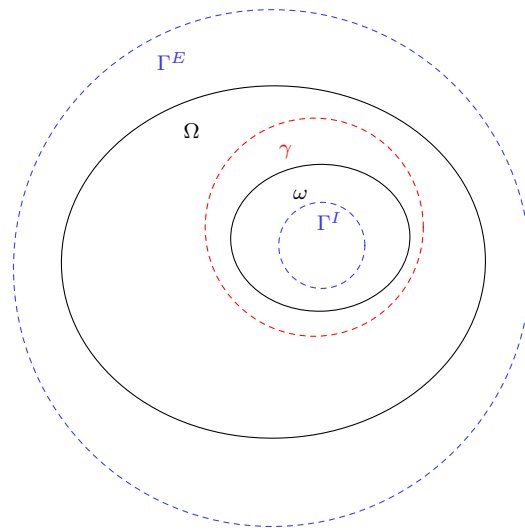
$$\{a_j, j = 1, 2, \dots, q\} \subset \Gamma^I,$$

$$\{b_l, l = 1, 2, \dots, r\} \subset \Gamma^E$$

são chamados *pontos de fonte* para o problema. As curvas fictícias para o problema são escolhidas de forma que:

- A curva γ seja suave, externa à ω , com $\gamma \subset (\Omega \setminus \bar{\omega})$;
- A curva Γ^I seja suave, externa à $\Omega \setminus \bar{\omega}$, com $\Gamma^I \subset \omega$;
- A curva Γ^E seja suave, externa à $\Omega \setminus \bar{\omega}$, com $\Gamma^E \subset \Omega^c$.

De fato podemos ter a seguinte representação:



Note que, neste momento, possuímos dois tipos de fronteiras: as físicas, $\partial\Omega$ e $\partial\omega$, e as fictícias, γ, Γ^I e Γ^E .

As fronteiras físicas são as fronteiras reais do domínio onde o problema está posto. As fronteiras fictícias são curvas escolhidas onde serão tomados os pontos de fonte para a elaboração, juntamente com os pontos de colocação, do sistema linear associado. Assim, para que ϑ seja solução de (5.4) é necessário que ϑ satisfaça às seguintes condições de fronteira:

- $[\vartheta] = -\phi$, sobre $\partial\omega$:

$$\sum_{j=1}^q \beta_j^I \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - a_j|) + \sum_{l=1}^r \beta_l^E \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - b_l|) - \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - c_i|)$$

$$= -\phi(x), \quad x \in \partial\omega;$$
- $\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right] = -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$, sobre $\partial\omega$:

$$\sum_{j=1}^q \beta_j^I \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - a_j|) \right] + \sum_{l=1}^r \beta_l^E \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - b_l|) \right]$$

$$- \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - c_i|) \right] = -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(x), \quad x \in \partial\omega;$$
- $\vartheta = g$, sobre $\partial\Omega$:

$$\sum_{j=1}^q \beta_j^I \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - a_j|) + \sum_{l=1}^r \beta_l^E \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x - b_l|) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Desta forma, tomando pontos de colocação $x_{m^*} \in \partial\omega$, com $m^* = 1, 2, \dots, m$, e $x_{n^*} \in \partial\Omega$, com $n^* = 1, 2, \dots, n$, podemos encarar o problema de determinar a solução acima, ϑ , como um sistema linear, onde o vetor solução é o vetor formado pelos coeficientes α_i , β_j^I e β_l^E , ou seja, temos o sistema

$$M \cdot \alpha = b,$$

onde

$$\alpha = \begin{bmatrix} [\alpha_i]_{p \times 1} \\ [\beta_j^I]_{q \times 1} \\ [\beta_l^E]_{r \times 1} \end{bmatrix}_{(p+q+r) \times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} [-\phi(x_{m^*})]_{m \times 1} \\ \left[-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(x_{m^*})\right]_{m \times 1} \\ [g(x_{n^*})]_{n \times 1} \end{bmatrix}_{(2m+n) \times 1}$$

e a matriz M , $(2m + n) \times (p + q + r)$, dos coeficientes do sistema linear é dada por

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - c_i|) \\ x_{m^*} \in \partial\omega; c_i \in \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - a_j|) \\ x_{m^*} \in \partial\omega; a_j \in \Gamma^I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - b_l|) \\ x_{m^*} \in \partial\omega; b_l \in \Gamma^E \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial\eta}[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - c_i|)] \\ x_{m^*} \in \partial\omega; c_i \in \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\eta}[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - a_j|)] \\ x_{m^*} \in \partial\omega; a_j \in \Gamma^I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\eta}[\Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{m^*} - b_l|)] \\ x_{m^*} \in \partial\omega; b_l \in \Gamma^E \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ x_{n^*} \in \partial\Omega; c_i \in \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{n^*} - a_j|) \\ x_{n^*} \in \partial\Omega; a_j \in \Gamma^I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_\lambda(\sqrt{\lambda}|x_{n^*} - b_l|) \\ x_{n^*} \in \partial\Omega; b_l \in \Gamma^E \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Em geral, considera-se $2m + n \geq 2(p + q + r)$ na caracterização da matriz M .

Note que esta abordagem é válida para :

- Equação de Helmholtz modificada: $\lambda > 0$
- Equação de Laplace: $\lambda = 0$
- Equação de Helmholtz: $\lambda < 0$.

Portanto, ao resolvermos o sistema linear

$$M \cdot \alpha = b,$$

encontramos a solução, ϑ , de (5.4), através do MFS. Com esta solução, geramos o dado artificial,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \text{ sobre } \partial\Omega,$$

a ser usado no problema inverso.

Por meio deste dado artificial gerado, vamos determinar o conjunto ω por meio de um método numérico *diferente* do MFS. Neste trabalho, usaremos o *Método de Levenberg-Marquardt*, apresentado no capítulo 2.

5.2 O Funcional a ser Minimizado

Como visto no capítulo 2, o método de Levenberg-Marquardt é um método numérico usado para minimizar funcionais dependentes de um conjunto de parâmetros. Nesta subseção vamos definir qual funcional estaremos interessados em minimizar.

Considere $r(t), t \in [0, 2\pi]$ uma parametrização da fronteira $\partial\omega$, onde $\omega \subset \Omega$ é um conjunto estrelado. A função r expressa a distância da fronteira $\partial\omega$ até seu centroide (x_c, y_c) .

Como mencionado no início da seção, nosso objetivo é realizar um processo numérico iterativo para obter uma representação aproximada de $r(t)$, no caso bidimensional. Para isto, vamos supor que $r(t)$ possua uma representação em série de Fourier da forma

$$r(t) = (x_c, y_c) + \left(r_M + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \alpha_{n+1} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) (\cos(t), \sin(t)), \quad (5.5)$$

onde (x_c, y_c) é o centroide do conjunto ω , obtido pela nova fórmula apresentada no teorema 4.2, capítulo 4, e r_M é a condição inicial do processo, ou seja, a primeira estimativa, dada pelo raio equivalente (raio médio), r_M , determinado por (4.8). Assim, nosso objetivo agora é determinar os coeficientes da expansão acima.

Considere o funcional de reciprocidade $\mathcal{R}[\chi_\omega](v)$ relativo ao problema direto de Helmholtz (5.1), com termo fonte $f(x) = \chi_\omega(x)$, resolvido pelo MFS. Este funcional é dado por

$$\mathcal{R}[\chi_\omega](v) = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma,$$

onde u é a solução, pelo MFS, do problema e $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Considere, agora, o funcional de reciprocidade $\mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}]$, onde $\tilde{\omega} \subset \Omega$ é uma aproximação de ω , onde $\partial\tilde{\omega}$ pode ser parametrizada por (5.5). Este problema com suporte aproximado possui como solução, pelo MFS, a função \tilde{u} . Além disso, o funcional $\mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v)$ é dado por

$$\mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v) = \int_{\partial\tilde{\omega}} v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \tilde{u} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma,$$

onde $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}|_{\partial\tilde{\omega}}$ é calculada, pelo MFS, para o suporte aproximado, tomando pontos de colocação diferentes, pontos de fonte diferentes, número de pontos na fronteira diferentes e espaçamento diferentes, e $\tilde{u}|_{\partial\tilde{\omega}} = u|_{\partial\Omega}$, ou seja, é utilizado o mesmo dado de Dirichlet nos dois problemas.

Observe que o conjunto $\tilde{\omega}$ depende dos parâmetros $\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$. Assim, tomando $v_\theta(x) = e^{\sqrt{\lambda}(\cos\theta, \sin\theta) \cdot x} \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$ e fixando NP como número de parâmetros da expansão, o objetivo é minimizar, dentre os parâmetros $\alpha_n, n \in \{1, \dots, NP\}$, o funcional

$$E(v_\theta) = \sum_{\theta \in [0, 2\pi]} (\mathcal{R}[\chi_\omega](v_\theta) - \mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v_\theta))^2. \quad (5.6)$$

Note que minimizar o funcional acima significa encontrar a melhor aproximação para o conjunto ω , baseado nos parâmetros $\alpha_n, n \in \{1, \dots, NP\}$.

Desta forma, tomando $\theta_i = i \frac{2\pi}{M}, i = 1, \dots, M$, obtemos M direções diferentes em \mathbb{S}^1 para as funções teste v_{θ_i} , ou seja, o funcional acima torna-se

$$E(v_{\theta_i}) = \sum_{i=0}^M (\mathcal{R}[\chi_\omega](v_{\theta_i}) - \mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v_{\theta_i}))^2. \quad (5.7)$$

Assim, o objetivo é determinar o melhor conjunto de parâmetros $\alpha_n, n \in \{1, \dots, NP\}$, tal que o funcional "erro cometido" acima seja mínimo. Com isto, o método numérico escolhido para realizar este processo de minimização foi o Método de Levenberg-Marquardt por possuir uma convergência mais rápida, sendo um intermediário entre o método de Gauss-Newton e o método do Gradiente. Este método foi apresentado de forma geral no capítulo 2.

De fato, observe que o problema de minimização (5.7) está na forma do problema de Levenberg-Marquardt 2.9, onde vamos tomar $\mathbf{A} = \{\alpha_n; n = 1, \dots, NP\}, y_i = \mathcal{R}[\chi_\omega](v_{\theta_i}), F(x_i, \mathbf{A}) = \mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v_{\theta_i})$.

Como neste procedimento iterativo é necessário dar um valor inicial para o vetor dos parâmetros \mathbf{A} , escolhemos este como $\mathbf{A}^{(0)} = (\alpha_n^{(0)}) = (r_M, 0, \dots, 0)$, onde r_M é o raio médio (4.8), que será estudado posteriormente no capítulo 4.

Além disso, no nosso caso, o vetor $J_i^{(k)} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}(x_i, \mathbf{A}^{(k)})$ é um vetor linha calculado da seguinte forma:

$$J_i^{(k)} = \left(\frac{F(x_i, \alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_j^{(k)} + \varepsilon_j, \dots, \alpha_{NP}^{(k)}) - F(x_i, \alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_j^{(k)}, \dots, \alpha_{NP}^{(k)})}{\varepsilon_j} \right),$$

com $j = 1, \dots, NP$. O valor do parâmetro de *damping*, μ , no algoritmo de Levenberg-Marquardt, pode ser tomado fixo ou variando a cada iteração ou ainda variando de acordo com algum critério estabelecido. Nos próximos experimentos foi tomado $\varepsilon_j = 10^{-5}$, para todo $j = 1, \dots, NP$, e foi escolhido o valor inicial de $\mu = 0.001$ e, a cada iteração, o valor de μ é multiplicado por 0.1. Este valor inicial e a taxa de decaimento foram escolhidos de forma empírica, após vários experimentos.

5.3 Experimentos Numéricos de Reconstrução da Fronteira

5.3.1 Experimentos Numéricos - Caso $\lambda > 0$

Os experimentos numéricos desta subseção foram feitos tomando o parâmetro $\lambda = 1$, ou seja, considerando a equação de Helmholtz modificada. Em todos os experimentos foi adotado o número de direções igual a 36, ou seja, $M = 36$.

Além disso, em todos os experimentos foi considerada também a ação de ruído, ou seja, foi considerada uma margem de erro nos dados medidos. Os dois tipos de ruídos considerados serão detalhados a seguir.

O *ruído relativo* é imposto sobre as medições na fronteira discretizada do domínio, ou seja, sobre os pontos de colocação, segundo o método das soluções fundamentais. Desta forma, o dado de Cauchy, em cada elemento desta lista, é multiplicado por uma função randômica que possui uma variação $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, ou seja, se g é o dado de Cauchy na fronteira, então

$$\tilde{g} = g(1 + \zeta_1)$$

é o dado de Cauchy com ruído relativo $\zeta_1 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

Por outro lado, o *ruído absoluto*, apesar de também ser imposto sobre os pontos de colocação do domínio, o dado de Cauchy, em cada elemento desta lista, é somado a uma função randômica que possui uma variação $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, ou seja, se g é o dado de Cauchy na fronteira, então

$$\tilde{g} = g + \zeta_2$$

é o dado de Cauchy com ruído absoluto $\zeta_2 \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$.

A seguir, foram realizados 3 experimentos. No experimento 5.3.1, foi considerada somente a influência do ruído relativo, no experimento 5.3.2, foi considerada a influência dos dois tipos de ruídos expostos acima e no experimento 5.3.3 foi considerado que o suporte seja um quadrado, sem considerar ruído.

Além disso, todos os experimentos numéricos foram feitos no programa *Mathematica*, versão 9, e rodados em um notebook com processador Intel core i7, 2.8 GHz, memória RAM 4 GB, 1333 MHz DDR3 em um sistema operacional OS X 10.9.5 .

Experimento 5.3.1. Neste experimento foi considerado que a fronteira do suporte original, $\partial\omega$, seja parametrizada por $r(t) = (x_c, y_c) + (1.1 - 0.6 \cos(3t))(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $(x_c, y_c) = (0.3, -0.1)$, e que o domínio, Ω , seja o interior da circunferência $R(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, como é mostrado na figura 5.1a, onde o dado de Dirichlet foi considerado identicamente nulo. Além disso, foi considerado que o número de parâmetros seja 7, ou seja, $NP = 7$. Isto significa que estaremos considerando 7 termos na expansão em série de Fourier da fronteira.

Foi considerado também no problema original 200 pontos de colocação e 100 pontos de fonte e no problema aproximado 160 pontos de colocação e 80 pontos de fonte. O vetor inicial dos parâmetros da reconstrução foi $\mathbf{A}^{(0)} = (r_M, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, onde o raio equivalente, $r_M = 0.321$, foi calculado pela equação (4.8).

Após 7 iterações, de aproximadamente 25s cada, foi obtida a reconstrução sem ruído, mostrada na figura 5.1b, onde a figura em vermelho é a original e a figura em verde é a reconstruída.

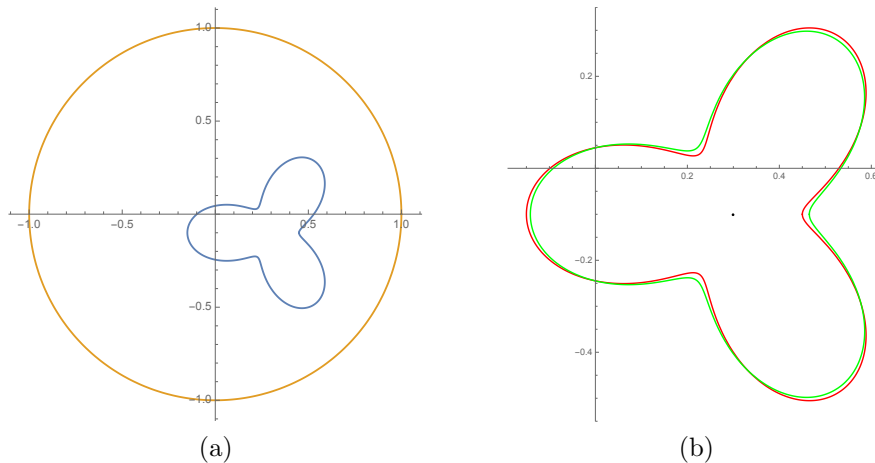


Figura 5.1: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)

Além disso, foram considerados ruído relativo de 1%, 5% e 10% no dado de Neumann, dado correspondente à derivada normal da solução, pelo MFS, do problema direto para o suporte aproximado. Em todos os casos, obtemos boas reconstruções,

pois a partir da quinta iteração, os conjuntos já encontraram-se muito próximos uns dos outros, como pode ser visto na figura 5.2. Novamente, a figura em vermelho é o suporte original, a figura em verde é o suporte reconstruído (melhor aproximação) e as figuras em cinza são os suportes gerados em cada iteração.

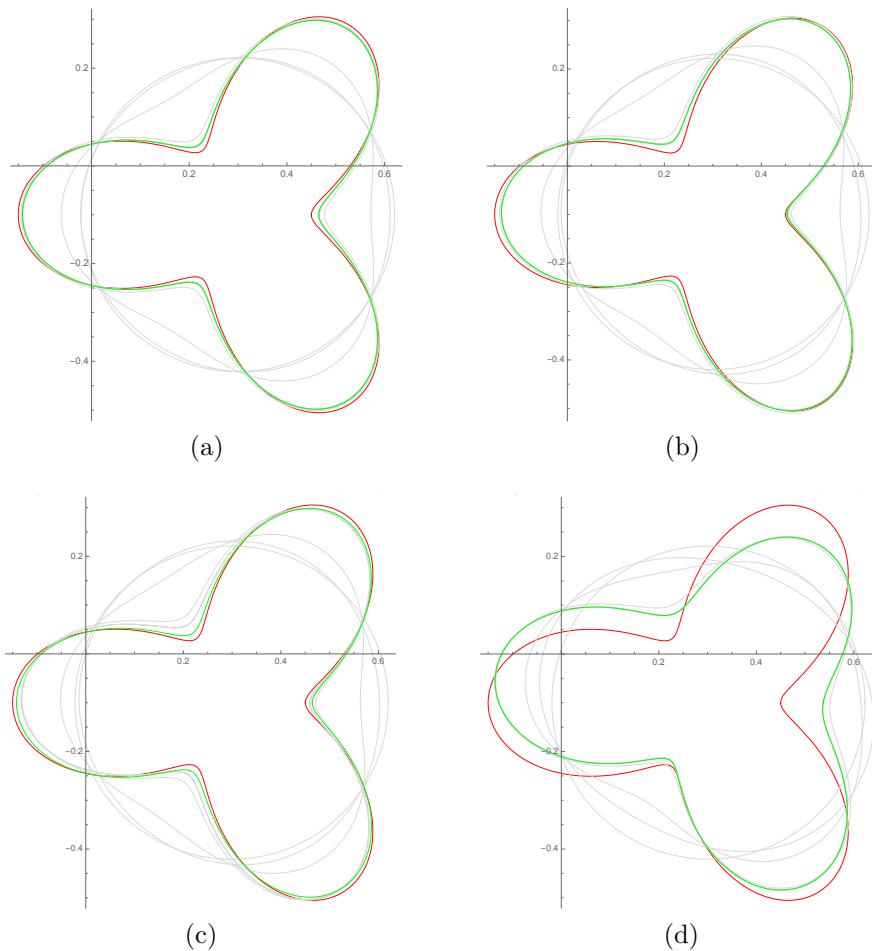


Figura 5.2: Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c), 30% (d)

Outro aspecto estudado foi a influência da variação do valor de λ na aproximação pelo método. Nos experimentos anteriores, foi considerado $\lambda = 1$. A seguir, na figura 5.3, estão as reconstruções relativas a $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.55$, $\lambda = 4$ e $\lambda = 10$. É importante notar que, à medida que o valor de λ aumenta, o valor do raio equivalente também aumenta, como pode ser observado na figura 5.3d, onde a reconstrução continuou mostrando-se bastante eficiente.

Além disso, também foram feitos experimentos com o mesmo tipo de domínio e fonte, mas com tamanhos diferentes. Na figura 5.4 , foi considerado o domínio como o círculo centrado na origem com raio 2 e suporte da fonte possuindo parametrização da fronteira dada por $r(t) = (0.3, -0.1) + (0.8 - 0.4 \cos(3t))(\cos(t), \sin(t))$. A reconstrução, sem ruído, foi bastante eficiente, pois a partir da terceira iteração não há alteração perceptível, como pode ser visto na figura 5.4b.

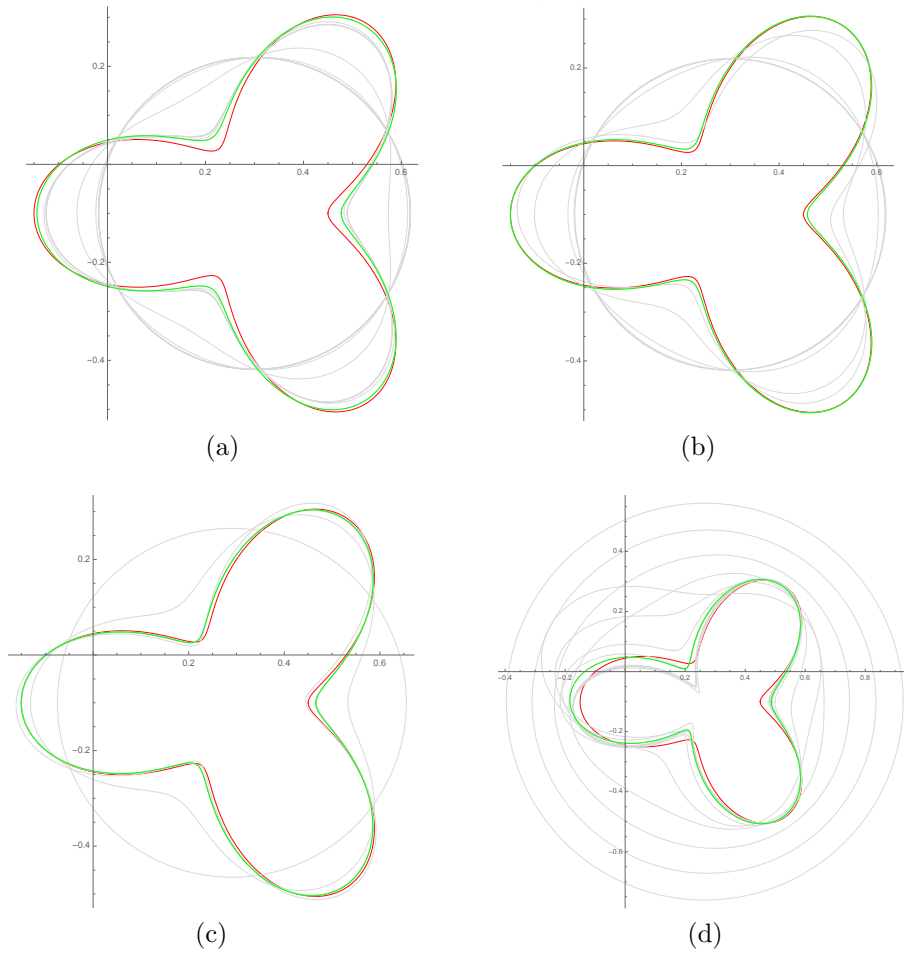


Figura 5.3: Variação em λ : $\lambda = 0.1$ (a) , $\lambda = 0.55$ (b) , $\lambda = 4$ (c), $\lambda = 10$ (d)

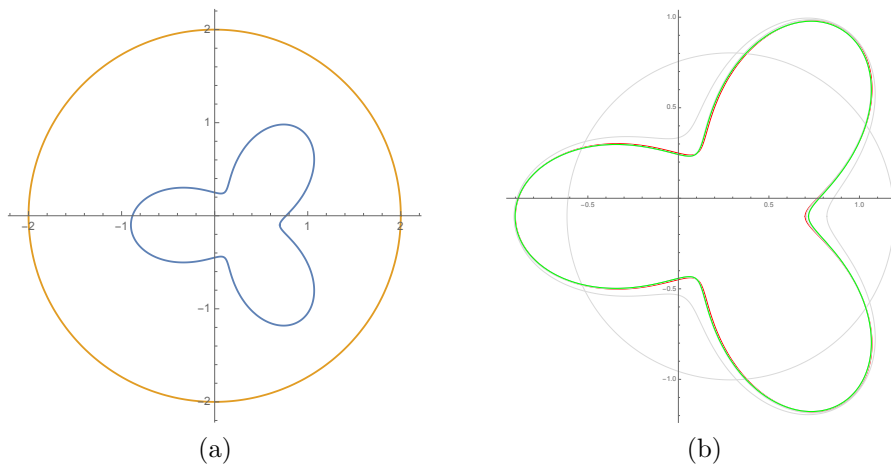


Figura 5.4: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)

Outro experimento feito foi considerando o mesmo domínio que o anterior, porém o suporte da fonte possuindo parametrização da fronteira dada por $r(t) = (0.3, -0.1) + (1.1 - 0.6 \cos(3t))(\cos(t), \sin(t))$. Neste experimento, existe uma parte da fronteira do suporte da fonte que está próxima da fronteira do domínio, como pode ser ob-

servado na figura 5.5a. A ideia do experimento foi verificar se, apesar desta proximidade, a reconstrução pelo método continuaria eficiente. De fato esta proximidade não influenciou na reconstrução, sem ruído, como pode ser observado na figura 5.5b. Além disso, mesmo considerando ruído, a influência deste parece ter sido menor, em comparação com o domínio anterior, como pode ser observado na figura 5.6, onde foram considerados ruídos relativos de 1%, 5%, 10% e 50%.

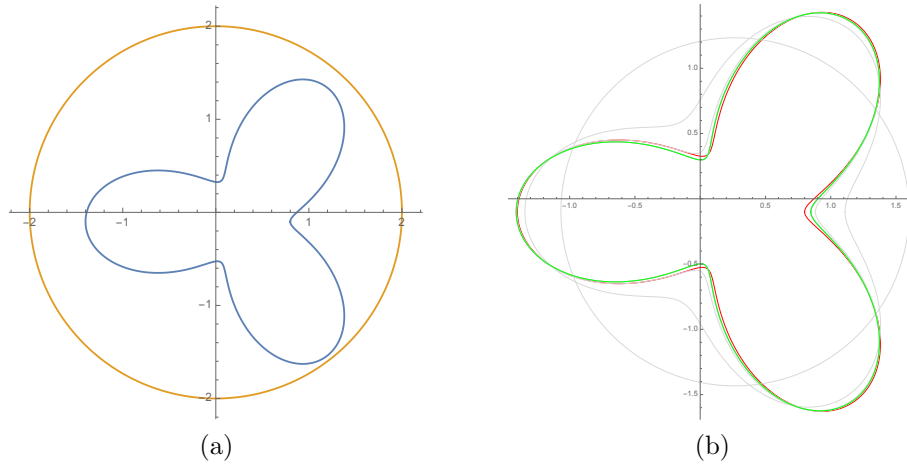


Figura 5.5: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)

Experimento 5.3.2. Neste experimento foi considerado que a fronteira do suporte original, $\partial\omega$, seja parametrizada por $r(t) = (x_c, y_c) + (0.3 - 0.1 \cos(5t))(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde, novamente, $(x_c, y_c) = (0.3, -0.1)$, e que o domínio, Ω , seja o interior da circunferência $R(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, como é mostrado na figura 5.7a, onde o dado de Dirichlet foi considerado identicamente nulo.

Novamente foram consideradas 36 direções diferentes para a reconstrução, ou seja, foi considerado $M = 36$. Além disso, foi considerado agora que o número de parâmetros seja $NP = 11$, ou seja, foi considerada uma expansão com 11 termos na série de Fourier, e que o valor inicial de μ e sua taxa de decaimento permanecessem os mesmos como no experimento anterior.

Assim, o vetor inicial foi dado por $\mathbf{A}^{(0)} = (r_M, 0, 0, \dots, 0)$, onde o raio equivalente, $r_M = 0.320988$, foi calculado pela equação (4.8). Desta forma, após 10 iterações, com aproximadamente 54s cada, foi obtida, sem ruído, a reconstrução que aparece em verde na figura 5.7b, onde a figura em vermelho é a original e os contornos em cinza são os suportes obtidos em cada iteração.

Neste experimento também foram considerados dois tipos de ruídos, o relativo e o absoluto.

Primeiramente, considerando apenas a influência do ruído relativo de 1%, 5% e 10%, as reconstruções mostraram-se mais sensíveis a este ruído do que aquelas do

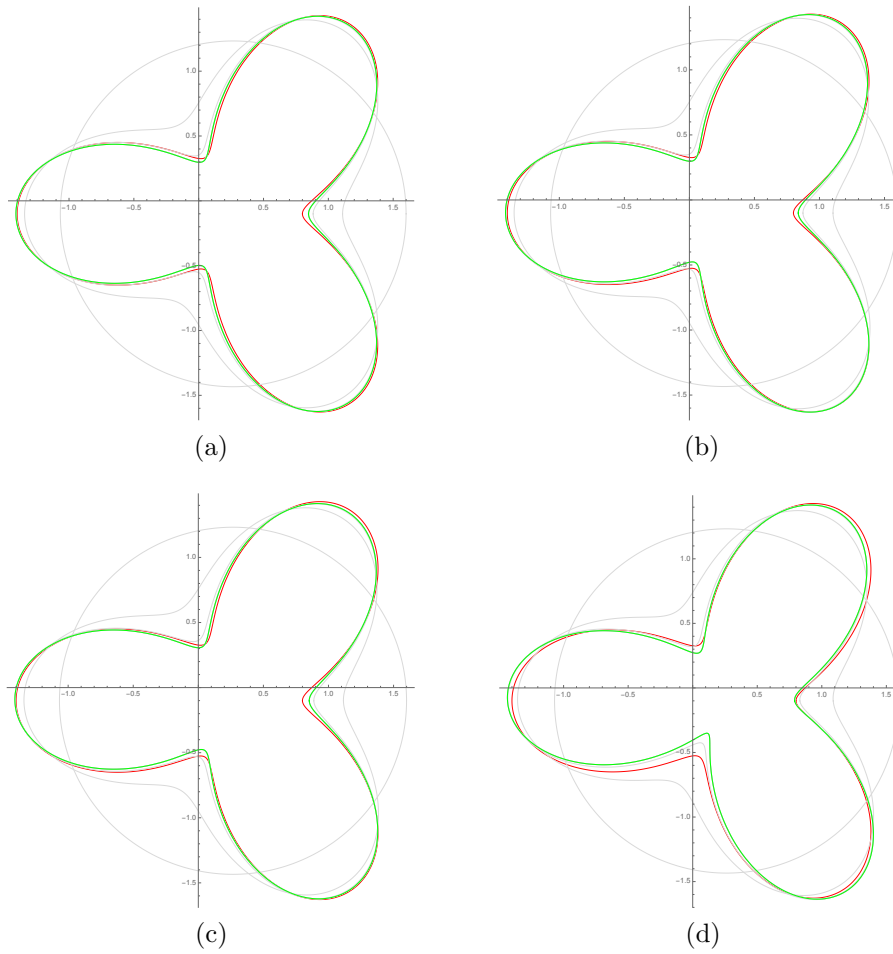


Figura 5.6: Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c), 50% (d)

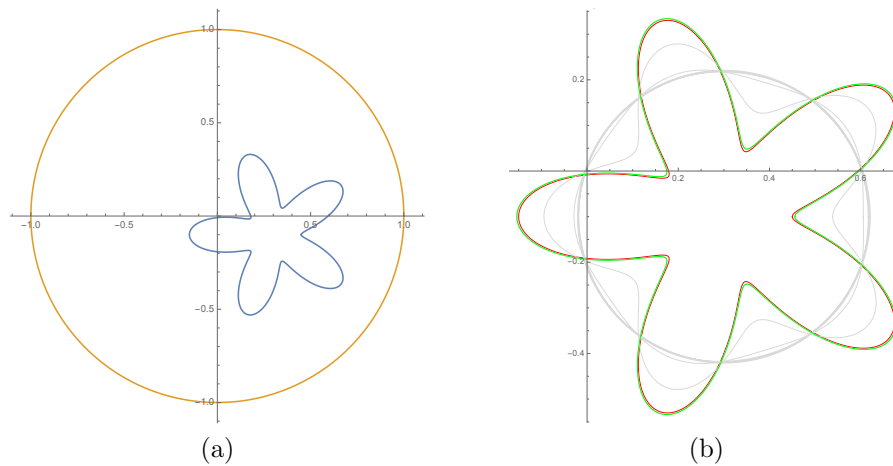


Figura 5.7: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 10 iterações, sem ruído (b)

experimento anterior. Este fato ocorre, provavelmente, devido aos sistemas a serem resolvidos, tanto do método das soluções fundamentais para obter a solução do problema direto, quanto do método de Levenberg-Marquardt para minimização

do funcional relativo ao erro cometido, estarem maiores, possuindo, possivelmente, maiores erros numéricos.

Na figura 5.8, podem ser comparadas as reconstruções devido à ação do ruído relativo, após 10 iterações. Na figura 5.8c, referente ao ruído relativo de 10%, o suporte em verde, correspondente à melhor aproximação, não foi relativo à última iteração, como nos outros casos, e sim devido à penúltima iteração.

Por outro lado, considerando apenas a influência do ruído absoluto de 0.01%, 0.05% e 0.1%, as reconstruções mostraram-se mais sensíveis a este tipo de ruído do que ao ruído relativo, como era esperado. Na figura 5.9, podem ser comparadas as reconstruções devido ao ruído absoluto, após 10 iterações. Observe que, considerando ruído absoluto de 0.05% e 0.1%, o suporte aproximado divergiu do original, como pode ser percebido nas figuras 5.9b e 5.9c, respectivamente. A única reconstrução que convergiu e que está próxima do original é a relativa ao ruído absoluto de 0.01%, como pode ser observado na figura 5.9a.

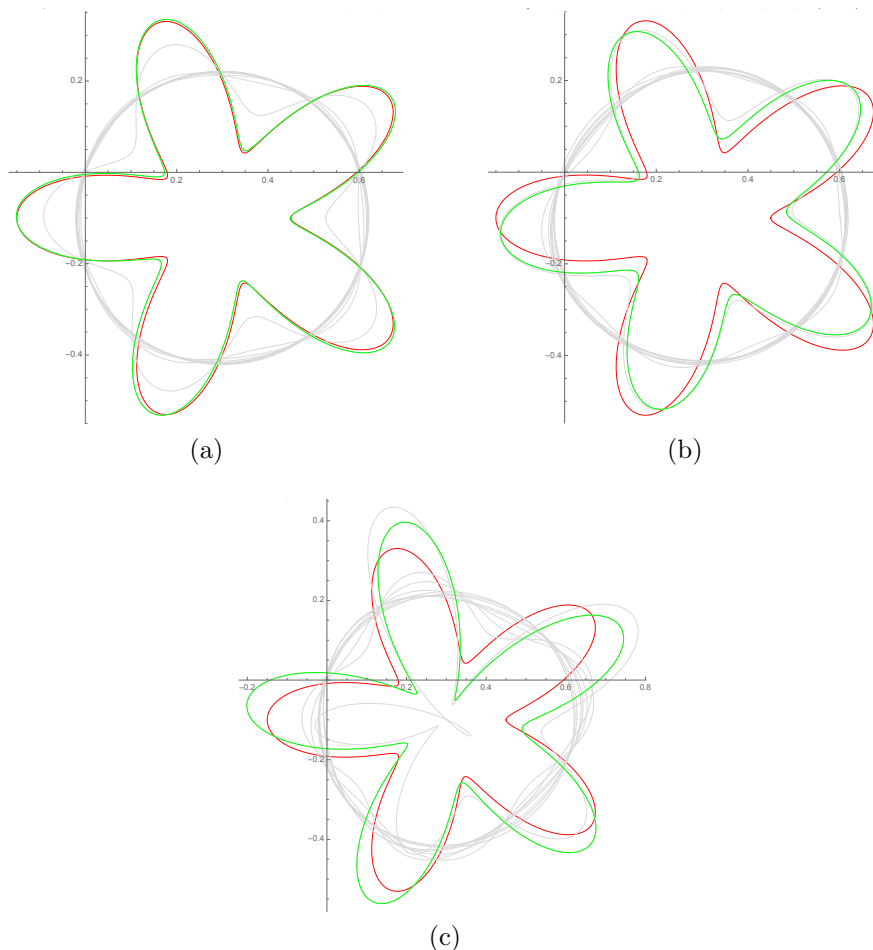


Figura 5.8: Ruído Relativo: 1% (a) , 5% (b) , 10% (c)

Experimento 5.3.3. Neste experimento foi considerado que a fronteira do suporte original, $\partial\omega$, seja o quadrado dado por $r(t) = (x_c, y_c) + \xi(t)(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$,

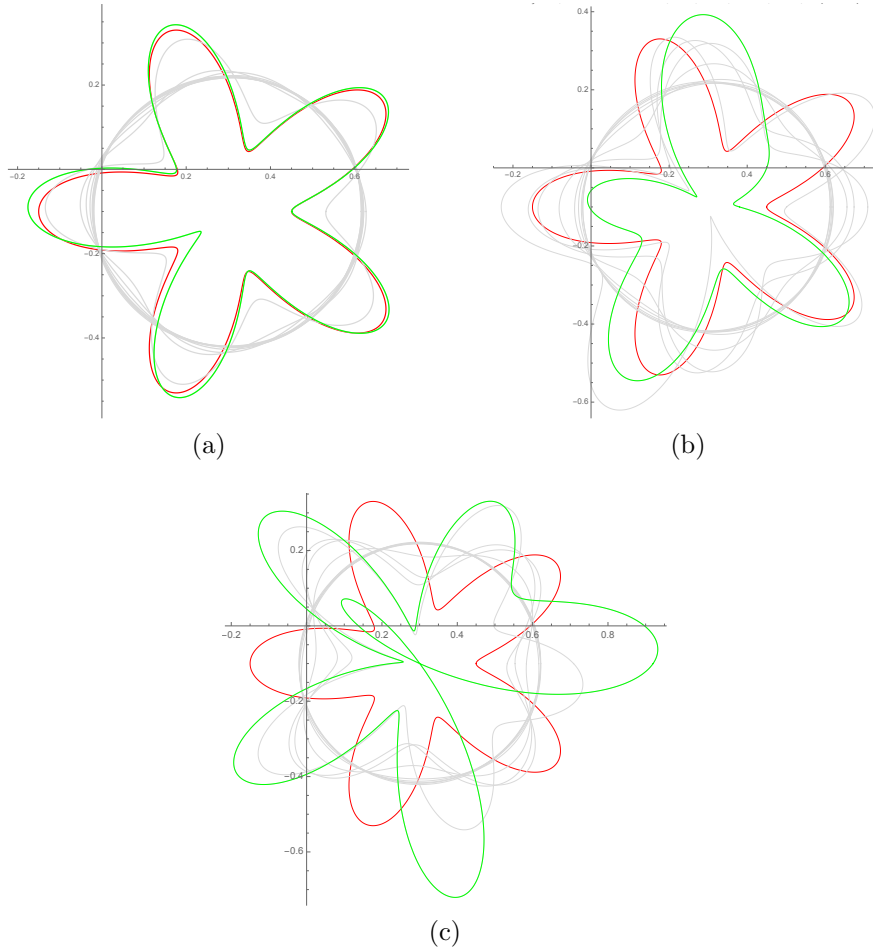


Figura 5.9: Ruído Absoluto: 0.01% (a) , 0.05% (b) , 0.1% (c)

onde, $(x_c, y_c) = (0.4, -0.2)$, e

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{0.3}{\cos(t)}, & \text{se } 0 \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{0.3}{\sin(t)}, & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}, \\ \frac{-0.3}{\cos(t)}, & \text{se } \frac{3\pi}{4} \leq t < \frac{5\pi}{4}, \\ \frac{-0.3}{\sin(t)}, & \text{se } \frac{5\pi}{4} \leq t < \frac{7\pi}{4}, \\ \frac{0.3}{\cos(t)}, & \text{se } \frac{7\pi}{4} \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (5.8)$$

que o domínio, Ω , seja, novamente, o interior da circunferência $R(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, como é mostrado na figura 5.10a, onde o dado de Dirichlet foi considerado identicamente nulo.

Novamente foi considerado $M = 36$, $NP = 11$ e que o valor inicial de λ e sua taxa de decaimento permanecessem os mesmos como nos experimentos anteriores. Desta forma, após 10 iterações, com aproximadamente 40s cada, a reconstrução obtida,

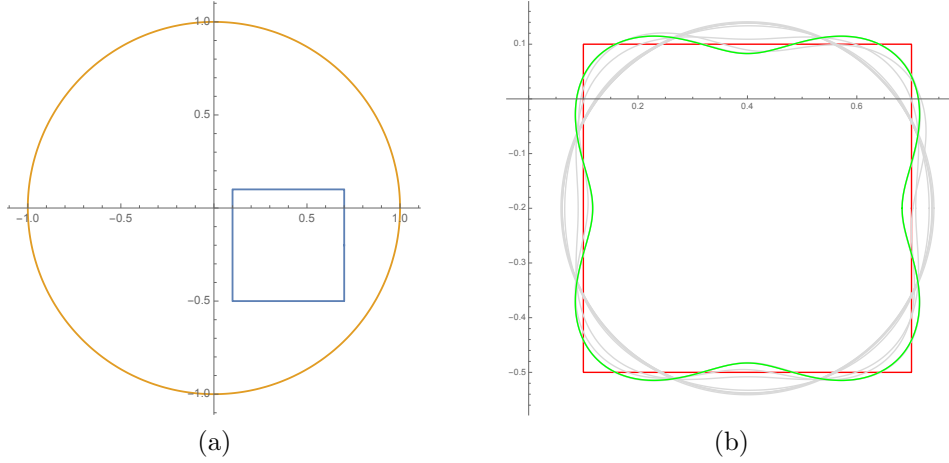


Figura 5.10: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 10 iterações, sem ruído (b)

sem ruído, é mostrada na figura 5.10b.

5.3.2 Experimentos Numéricos - Caso $\lambda < 0$

Os experimentos numéricos desta subseção foram feitos tomando o parâmetro $\lambda = -1$. O valor de μ , no algoritmo de Levenberg-Marquardt, foi tomado o mesmo da subseção anterior, ou seja, foi escolhido o valor inicial de $\mu = 0.001$ e, a cada iteração, o valor de μ é multiplicado por 0.1. Além disso, também foi mantido o número de direções igual a 36, ou seja, $M = 36$.

Experimento 5.3.4. Neste experimento foi considerado que a fronteira do suporte original, $\partial\omega$, seja parametrizada por $r(t) = (x_c, y_c) + (0.3 - 0.15 \cos(3t))(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $(x_c, y_c) = (0.4, -0.2)$, e que o domínio, Ω , seja o interior da circunferência $R(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, como é mostrado na figura 5.11a, onde o dado de Dirichlet foi considerado identicamente nulo. Além disso, foi considerado que o número de parâmetros seja 7, ou seja, $NP = 7$, e que tenhamos no problema original 200 pontos de colocação e 100 pontos de fonte e no problema aproximado 160 pontos de colocação e 80 pontos de fonte. O valor do raio equivalente, calculado pela equação (4.8), é dado por $r_M = 0.315357 - 8.14923 \times 10^{-8}i$, onde consideramos o vetor inicial dos parâmetros da reconstrução como $\mathbf{A}^{(0)} = (\text{Re}(r_M), 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, onde $\text{Re}(r_M)$ representa a parte real de r_M . Por outro lado, devido ao valor de $\lambda < 0$, devemos considerar solução fundamental e funções teste diferentes. Neste caso, foram consideradas as funções teste

$$v_i(x) = K_0(\sqrt{-\lambda}\|x - y_i\|),$$

onde y_i , $i = 1, 2, \dots, 100$, são os pontos de fonte, e $K_0(\cdot)$ é a função de Bessel mo-

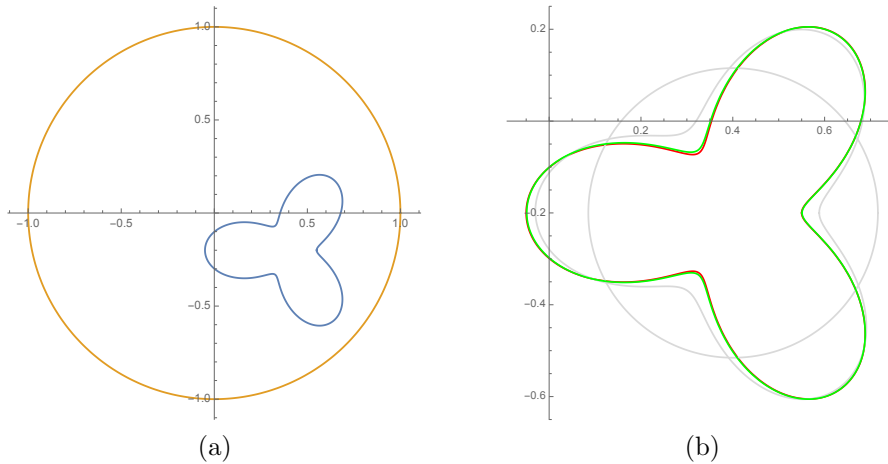


Figura 5.11: Caso $\lambda < 0$: Domínio considerado (a) e reconstrução, após 7 iterações, sem ruído (b)

dificada do segundo tipo de ordem zero. Após 7 iterações, de aproximadamente 65s cada, foi obtida a reconstrução sem ruído, mostrada na figura 5.11b, onde a figura em vermelho é a original e a em verde é a reconstruída. Neste experimento, todas as iterações, a partir da terceira, estão muito próximas, não possuindo diferenças significantes.

Apesar do tempo em cada iteração ser maior, em comparação com o caso $\lambda > 0$, a convergência do suporte é mais rápida, ou seja, a partir da terceira iteração já obtemos informação suficiente.

Com relação ao ruído, foram considerados os dois tipos de ruídos. Neste caso, ruído relativo, no dado de Neumann, de 1%, 10% e 30% e ruído absoluto, no dado de Neumann, de 1% e 5%. De forma análoga aos experimentos anteriores, os ruídos considerados foram impostos na medição da derivada normal da solução, pelo MFS, do problema direto (5.1).

Nos testes relacionados ao ruído relativo, foram consideradas três iterações, tendo em vista sua rápida convergência. Desta forma, considerando ruído relativo de 1%, o suporte reconstruído está muito próximo do original, como pode ser visto na figura 5.12a, onde a figura em vermelho é a original e a verde, a reconstruída.

De forma análoga, quando considerado ruído relativo de 10%, o suporte reconstruído, apesar de apresentar maiores erros do que o teste anterior, ainda mantém o formato do suporte original, como pode ser observado na figura 5.12b, onde, novamente, a figura em vermelho é a original e a verde, a reconstruída.

Quando considerado ruído relativo de 30%, o suporte reconstruído continuou a manter o formato original, porém apresentando erro maior do que o teste anterior de 10%. A diferença entre estas reconstruções não é muito alta devido ao ruído nas medições ser randômico, como pode ser observado na figura 5.12c, onde, novamente,

a figura em vermelho é a original e a verde, a reconstruída.

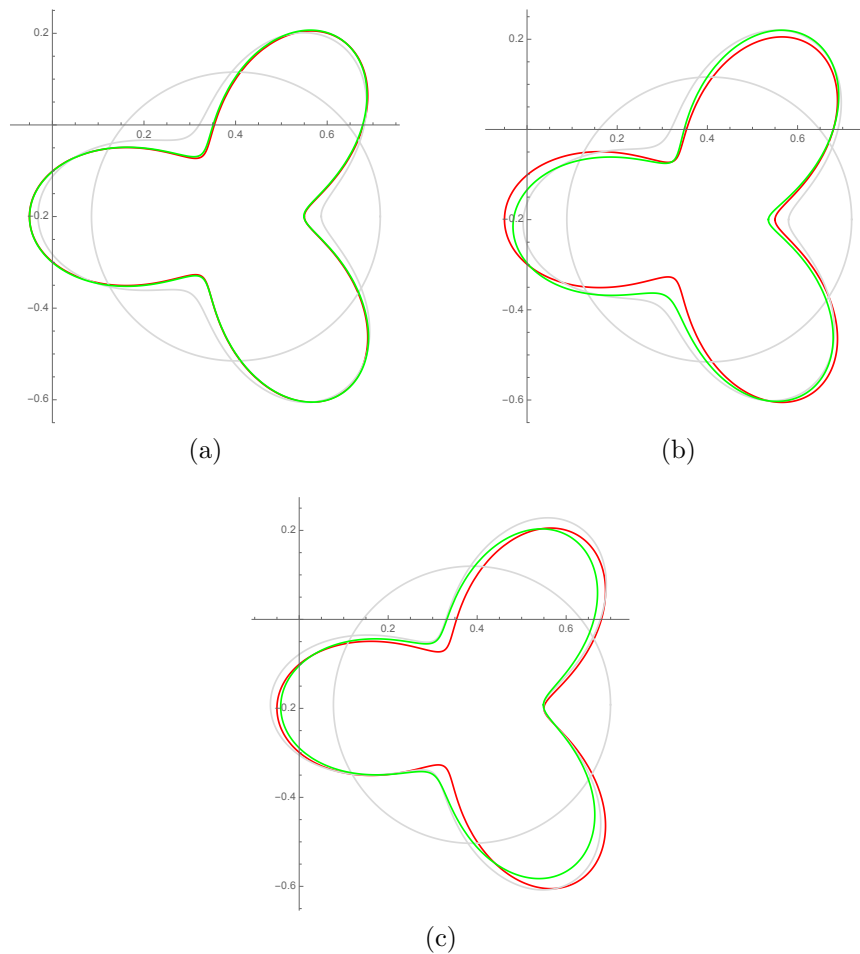


Figura 5.12: Caso κ Complexo: Ruído Relativo: 1% (a) , 10% (b) , 30% (c)

Nos testes relacionados ao ruído absoluto, também foram consideradas 7 iterações. No entanto, como anteriormente, o método convergiu a partir da terceira iteração, ou seja, os suportes reconstruídos, a cada iteração, não diferem um do outro.

No caso em que o ruído absoluto foi 1%, o suporte reconstruído manteve um formato próximo do original, mas apresentando um erro alto, onde a reconstrução mostrou-se pior do que aquela correspondente ao ruído relativo de 30%, como pode ser observado na figura 5.13a, onde, novamente, a figura em vermelho é o suporte original e a em verde é o suporte reconstruído.

Por outro lado, ao considerar o ruído absoluto de 5%, o suporte reconstruído divergiu completamente do original já na segunda iteração, como pode ser observado na figura 5.13b, onde, novamente, a figura em vermelho é o suporte original e a em verde é o suporte reconstruído.

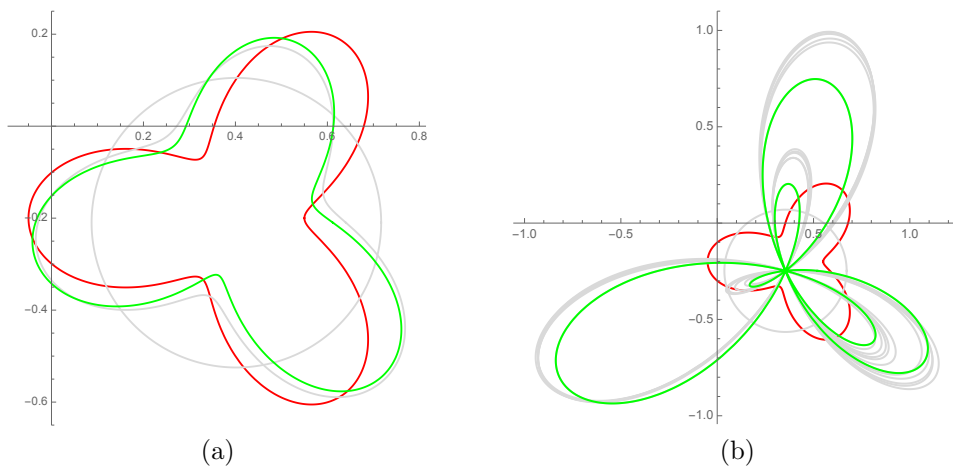


Figura 5.13: Caso κ complexo: Ruído Absoluto: 1% (a) , 5% (b)

Capítulo 6

O Problema de Estabilidade Condicional para Equações de Helmholtz

Neste capítulo, estudamos a estabilidade de problemas inversos de fonte, onde na seção 6.1, apresentamos uma ideia geral do problema inverso de estabilidade para equações de Helmholtz.

Na seção 6.2, apresentamos um novo resultado sobre estabilidade condicional para problemas inversos de fonte para o operador de Helmholtz.

Por fim, na seção 6.3, são realizados alguns experimentos numéricos relacionados com a comparação entre a solução real e a solução considerando ruídos na medição dos dados de Cauchy.

6.1 A Estabilidade em Problemas Inversos

Nesta seção, estaremos interessados em estudar a estabilidade de problemas inversos de fonte para equação de Helmholtz, supondo a existência e a unicidade na reconstrução de fontes características. Para isto, considere o problema direto (3.1), dado por

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

O objetivo deste problema é calcular

$$g_\eta := \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Na seção 5.1, capítulo 5, este problema foi resolvido pelo Método das Soluções

Fundamentais (MFS) para determinar a solução u e depois calcular sua derivada normal.

Além disto, no problema inverso, o ruído foi imposto sobre este dado de Neumann e, através do algoritmo de Levenberg-Marquardt, minimizamos a diferença de dois funcionais de reciprocidade, onde o objetivo foi obter um suporte $\tilde{\omega}$ que melhor aproximava o suporte original ω .

O problema de estabilidade para fontes características é formulado de forma um pouco diferente.

Dadas duas fontes características $f = \chi_\omega$ e $\tilde{f} = \chi_{\tilde{\omega}}$ para o problema 6.1. Suponha que estas fontes geram o mesmo dado de Dirichlet. O *problema de estabilidade direto* consiste em verificar se

$$g_\eta \approx \tilde{g}_\eta,$$

quando $\omega \approx \tilde{\omega}$.

Por outro lado, o problema de estabilidade inverso, *a priori*, poderia consistir em verificar se $\omega \approx \tilde{\omega}$, quando $g_\eta \approx \tilde{g}_\eta$, supondo existência e unicidade do problema inverso de fonte.

A questão central no problema de estabilidade direto é que, em um problema prático/real, não temos informação sobre o dado original de Neumann g_η . Na verdade, temos somente informação sobre o dado artificial de Neumann g_η^{art} , que é um dado com erro de medição.

Na subseção 5.2, foi mostrado que, a partir deste dado, podemos determinar, através do algoritmo de Levenberg-Marquardt, os parâmetros na expansão de Fourier da fronteira que minimiza o erro cometido e que, conseqüentemente, melhor aproxima a fronteira original através do suporte aproximado $\tilde{\omega}$. Este suporte está relacionado ao dado de Neumann aproximado g_η^{LM} . Este dado aproximado é determinado a partir da solução do problema direto, usando MFS, com suporte da fonte $\tilde{\omega}$.

O *problema de estabilidade inverso* consiste em verificar se, mesmo partindo de um dado "errado" (com erros de medição), g_η^{art} , podemos aproximar o suporte ω por $\tilde{\omega}$, ao aproximar g_η^{art} por g_η^{LM} . Além disso, também é interessante verificar se podemos aproximar o dado original g_η pelo calculado g_η^{LM} , ou seja, se $g_\eta^{LM} - g_\eta^{art} \approx 0$, então devemos verificar se $g_\eta^{LM} - g_\eta \approx 0$.

Desta forma, se $g_\eta^{LM} - g_\eta \approx 0$, então, supondo existência e unicidade para o problema inverso de fonte, temos que $\omega \approx \tilde{\omega}$.

Observe que, pela identidade de Green, temos a seguinte relação

$$\langle g_\eta - g_\eta^{LM}, v \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle f^{LM} - f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \approx 0,$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, onde $f = \chi_\omega$ é a fonte com suporte original e $f^{LM}(x) = \chi_{\tilde{\omega}}(x)$ é a fonte com suporte aproximado pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt que gera o

mesmo dado de Dirichlet. Desta forma, se f^{LM} , determinado pelo algoritmo, estiver próximo de f , então g_η estará próximo de g_η^{LM} . Na subseção 6.3, apresentamos alguns experimentos numéricos relacionados a este problema de estabilidade inverso.

6.2 A Estabilidade Condicional em L^1 e em L^∞

Nesta seção apresentaremos dois novos resultados de estabilidade do problema inverso de fonte característica para equações de Helmholtz, supondo a existência e a unicidade deste problema.

O termo *estabilidade condicional* surge quando temos que fazer hipóteses *adicionais* para conseguir estabelecer um resultado de estabilidade. Muitos trabalhos se envolvem nesta área de estabilidade condicional, onde podemos citar [22], [23], [34], [35], [36].

No nosso caso, vamos estudar dois problemas inversos de fonte, onde iremos definir uma *condição de separação* sobre os dados de Neumann, supondo o mesmo dado de Dirichlet para ambos os problemas. Com isto, iremos estudar a estabilidade na reconstrução das fronteiras de fontes características.

Definição 6.1. *Sejam $f_1 = \chi_{\omega_1}$ e $f_2 = \chi_{\omega_2}$ duas fontes para o problema inverso (3.2). Suponha que f_1 e f_2 geram os dados de Neumann sobre a fronteira g_η^1 e g_η^2 , em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ respectivamente, com dado de Dirichlet nulo. Dizemos que os dados de Neumann estão separados, ou satisfazem uma condição de separação, se*

$$\|g_\eta^1 - g_\eta^2\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} > 0. \quad (6.2)$$

Observação 6.1. *Note que, por (3.4), o dado de Neumann ser separado em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, é equivalente ao funcional de reciprocidade ser separado em $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$ ou em $L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$, com função teste do tipo exponencial. De fato, como os espaços $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e $\mathcal{H}_\lambda(\Omega)$ são homeomorfos, ver [5], então*

$$|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](v) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](v)| = |\langle g_\eta^2 - g_\eta^1, v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}| = |\langle g_\eta^2 - g_\eta^1, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}| > 0,$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Em particular, tomando as funções teste como $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$, com $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$, e o funcional de reciprocidade como $\mathcal{R}[\chi_\omega](\varphi) := \mathcal{R}[\chi_\omega](v_\varphi)$, temos que

$$|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)| > 0,$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Consequentemente,

$$\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} > 0$$

e

$$\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})} > 0.$$

Teorema 6.1 (Estabilidade Condicional em L^1). *Considere duas fontes características $f_1(x) = \chi_{\omega_1}(x)$ e $f_2(x) = \chi_{\omega_2}(x)$ para o problema inverso (3.2), onde ω_1 e ω_2 são subconjuntos abertos, conexos e limitados de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, possuindo o mesmo centroide. Sejam $R_1, R_2 : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ parametrizações de $\partial\omega_1$ e $\partial\omega_2$, respectivamente, com $R_1, R_2 \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Se o dado de Neumann gerado pelas fontes estão separados, então existe uma constante $C = C(N) > 0$, tal que*

$$\|R_2 - R_1\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^{\frac{1}{N}}, \quad (6.3)$$

onde

$$\|R_2 - R_1\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1(\theta) - R_2(\theta)| d\theta$$

e

$$\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)| d\varphi.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, como ω_1 e ω_2 possuem o mesmo centroide e R_1 e R_2 parametrizam as fronteiras $\partial\omega_1$ e $\partial\omega_2$, respectivamente, então temos, por (3.4),

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R_i(\theta)} v(r\theta) r^{N-1} dr d\theta = \mathcal{R}[\chi_{\omega_i}](v), \quad i = 1, 2.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{R_1(\theta)}^{R_2(\theta)} v(r\theta) r^{N-1} dr d\theta = \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](v) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](v),$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Considere a seguinte mudança de coordenadas para a integral acima

$$r^N = \rho^N (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) + R_1^N(\theta).$$

Logo, definindo $\bar{r}(\rho, \theta) = (R_1^N(\theta) + \rho^N (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)))^{\frac{1}{N}}$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) \int_0^1 v(\theta \bar{r}(\rho, \theta)) \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](v) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](v). \end{aligned}$$

Defina a função $K_v : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$K_v(\theta) = \int_0^1 v(\theta \bar{r}(\rho, \theta)) \rho^{N-1} d\rho.$$

Desta forma, temos a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) K_v(\theta) d\theta = \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](v) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](v),$$

para toda $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$. Em particular, tomando a função teste $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$, com $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ e $\kappa = \sqrt{\lambda}$,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta = \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi), \quad (6.4)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$, onde $\mathcal{R}[\chi_{\omega_i}](\varphi) := \mathcal{R}[\chi_{\omega_i}](v_\varphi)$, $i = 1, 2$, e

$$K_\varphi(\theta) := K_{v_\varphi}(\theta) = \int_0^1 e^{\kappa(R_1^N(\theta) + \rho^N(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)))^{1/N} \varphi \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho.$$

Afirmção 6.2.

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}. \quad (6.5)$$

Demonstração da Afirmção 6.2. Note que, por (6.4), como $K_\varphi > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Assim, como o dados de Neumann gerados são separados, então pela observação 6.1, obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)| d\varphi > 0$$

e, conseqüentemente,

$$0 < \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)| d\varphi \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} 2\text{diam}(\Omega)^N K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi,$$

pois $R_i(\theta) \leq \text{diam}(\Omega)$, para $i = 1, 2$, onde $\text{diam}(\Omega)$ denota o diâmetro do conjunto Ω .

Além disso, também temos que

$$(R_1^N(\theta) + \rho^N(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)))^{1/N} \leq 3^{1/N} \text{diam}(\Omega).$$

Logo, como $\rho \leq 1$ e $\varphi \cdot \theta \leq 1$,

$$K_\varphi(\theta) = \int_0^1 e^{\kappa(R_1^N(\theta) + \rho^N(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)))^{1/N} \varphi \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho \leq e^{\kappa 3^{1/N} \text{diam}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} 2 \text{diam}(\Omega)^N K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq 2 \text{diam}(\Omega)^N e^{\kappa 3^{1/N} \text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1})^2.$$

Assim, é possível tomar uma constante $C_N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C_N &\geq \frac{2 \text{diam}(\Omega)^N e^{\kappa 3^{1/N} \text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1})^2}{\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}} \\ &\geq \frac{\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi}{\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}} \geq 1, \end{aligned}$$

na qual é independente de φ . Logo

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}, \quad (6.6)$$

o que prova a Afirmação 6.2. \square

Agora considere os seguintes conjuntos

$$\Gamma_0 = \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; R_1(\theta) = R_2(\theta)\},$$

$$\Gamma_1 = \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; R_1(\theta) > R_2(\theta)\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; R_2(\theta) > R_1(\theta)\}.$$

Como $\Gamma_i \subset \mathbb{S}^{N-1}$, $i = 1, 2$, onde $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mathbb{S}^{N-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta &\leq \left| \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_1} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. Desta forma,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi. \quad (6.7)$$

e, de forma análoga para Γ_2 ,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\Gamma_2} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)| K_\varphi(\theta) d\theta d\varphi. \quad (6.8)$$

Desta forma, por (6.7), (6.8) e pela afirmação 6.2, obtemos, usando Teorema de Fubini, que

$$C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)) \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right) d\theta$$

e

$$C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq \int_{\Gamma_2} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right) d\theta.$$

Assim, nosso objetivo é aplicar o seguinte teorema, conhecido como Desigualdade Reversa de Hölder, ver [47], no lado direito das desigualdades acima.

Teorema 6.3 (Desigualdade de Hölder Reversa). *Seja $0 < p < 1$ de modo que $p' = \frac{p}{p-1} < 0$. Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $0 < \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx < \infty$. Então*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \geq \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right\}^{1/p'}.$$

Vamos aplicar a desigualdade reversa de Hölder para $0 < p := 1/N < 1$. Para isto, precisamos mostrar somente que

$$0 < \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta < \infty,$$

pois como $R_1, R_2 \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$, temos que $R_1^N, R_2^N \in L^p(\mathbb{S}^{N-1})$.

Afirmação 6.4. *Dados $0 < p < 1$ e $p' = \frac{p}{p-1} < 0$, então*

$$0 < \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta < \infty,$$

onde $K_\varphi(\theta) := K_{v_\varphi}(\theta)$, com $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$, $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Demonstração da Afirmação 6.4. Considere $0 < p < 1$, com $p' := \frac{p}{p-1} < 0$. Em

primeiro lugar, observe que tomando $x = \rho^N$

$$K_\varphi(\theta) = \int_0^1 e^{\kappa \bar{r}(\rho, \theta) \varphi \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho = \frac{1}{N} \int_0^1 e^{\kappa(x(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) + R_1^N(\theta))^{\frac{1}{N}} \varphi \cdot \theta} dx > 0,$$

para todo $\varphi, \theta \in \mathbb{S}^{N-1}$. Logo, se a integral existir,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi > 0.$$

para todo $\theta \in \mathbb{S}^{N-1}$, e, então,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta > 0.$$

Em segundo lugar, como $R_i(\theta) \leq \text{diam}(\Omega)$, para $i = 1, 2$, temos que $R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta) \leq 2\text{diam}(\Omega)^N$, e, então

$$(x(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) + R_1^N(\theta))^{\frac{1}{N}} \leq 3^{1/N} \text{diam}(\Omega),$$

pois $x \leq 1$. Além disso, como $\varphi \cdot \theta \geq -1$, temos que

$$K_\varphi(\theta) \geq \frac{1}{N} \int_0^1 e^{-\kappa(x(R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) + R_1^N(\theta))^{\frac{1}{N}}} dx \quad (6.9)$$

$$\geq \frac{1}{N} e^{-3^{1/N} \kappa \text{diam}(\Omega)}, \quad (6.10)$$

para todo $\varphi, \theta \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Assim,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \geq \frac{1}{N} e^{3^{1/N} \kappa \text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1}),$$

ou seja, como $p' = \frac{p}{p-1} < 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} \leq \left(\frac{1}{N} e^{3^{1/N} \kappa \text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1}) \right)^{p'},$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \leq \left(\frac{1}{N} e^{3^{1/N} \kappa \text{diam}(\Omega)} \mu(\mathbb{S}^{N-1}) \right)^{p'} \mu(\mathbb{S}^{N-1}) < \infty,$$

para todo $0 < p < 1$, com $p' = \frac{p}{p-1} < 0$, o que prova a afirmação 6.4. \square

Observe que a afirmação 6.4 é válida para qualquer $0 < p < 1$, em particular,

$p = 1/N$. Logo, pela desigualdade de Hölder reversa e pela afirmação 6.4, obtemos

$$\begin{aligned}
C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} &\geq \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)) \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right) d\theta \\
&\geq \left\{ \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta))^p d\theta \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right\}^{1/p'} \quad (6.11)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_N \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} &\geq \int_{\Gamma_2} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta)) \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right) d\theta \\
&\geq \left\{ \int_{\Gamma_2} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta))^p d\theta \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Gamma_2} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right\}^{1/p'}. \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Portanto, por (6.11) e (6.12), como $\left| \frac{p}{p'} \right| = 1 - p$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p d\theta \\
&= \int_{\Gamma_1} (R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta))^p d\theta + \int_{\Gamma_2} (R_2^N(\theta) - R_1^N(\theta))^p d\theta \\
&\leq C_N^p \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^p \\
&\quad \cdot \left\{ \left[\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right]^{1-p} + \left[\int_{\Gamma_2} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right]^{1-p} \right\} \\
&\leq 2C_N^p \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^p \left[\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right]^{1-p}.
\end{aligned}$$

Assim, baseado na demonstração da afirmação 6.4 (tomando $p = 1/N$), é possível definir uma constante $C = C(N) > 0$ de forma que

$$C \geq 2C_N^p \left[\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{N-1}} K_\varphi(\theta) d\varphi \right)^{p'} d\theta \right]^{1-p} > 0.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p d\theta \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^p. \quad (6.13)$$

Agora note que, para $0 < p < 1$, $(a + b)^p \leq a^p + b^p$, com $a, b \geq 0$. Logo

$$|R_1^N(\theta)|^p \leq |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p + |R_2^N(\theta)|^p$$

e

$$|R_2^N(\theta)|^p \leq |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p + |R_1^N(\theta)|^p.$$

Assim, como $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$,

$$|R_1^{Np}(\theta) - R_2^{Np}(\theta)| \leq |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^{Np}(\theta) - R_2^{Np}(\theta)| d\theta \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^N(\theta) - R_2^N(\theta)|^p d\theta.$$

Logo, por 6.13,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1^{Np}(\theta) - R_2^{Np}(\theta)| d\theta \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^p.$$

Finalmente, como $0 < p = 1/N < 1$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |R_1(\theta) - R_2(\theta)| d\theta \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^{\frac{1}{N}}$$

e, então, obtemos a seguinte desigualdade de estabilidade em $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$

$$\|R_1 - R_2\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^{\frac{1}{N}}, \quad (6.14)$$

o que prova o teorema 6.1. □

Observação 6.2. *Observe que o teorema 4.4 é uma versão particular do teorema 6.1, onde foi considerado somente uma fonte característica.*

Observação 6.3. *Através de algumas modificações na demonstração do teorema 6.5, é possível estabelecer um resultado de estabilidade similar em $L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$.*

Teorema 6.5 (Estabilidade Condicional em L^∞). *Considere duas fontes características $f_1(x) = \chi_{\omega_1}(x)$ e $f_2(x) = \chi_{\omega_2}(x)$ para o problema inverso 3.2, onde ω_1 e ω_2 são subconjuntos abertos, conexos e limitados de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, possuindo o mesmo centroide. Sejam $R_1, R_2 : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ parametrizações de $\partial\omega_1$ e $\partial\omega_2$, respectivamente, com $R_1, R_2 \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Se o dado de Neumann gerado pelas fontes são separados, então existe uma constante $C = C(N) > 0$, tal que*

$$\|R_2 - R_1\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C \|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})}^{\frac{1}{N}}, \quad (6.15)$$

onde

$$\|R_2 - R_1\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |R_1(\theta) - R_2(\theta)| d\theta$$

e

$$\|\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}] - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}]\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})} = \text{ess sup}_{\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}} |\mathcal{R}[\chi_{\omega_1}](\varphi) - \mathcal{R}[\chi_{\omega_2}](\varphi)|.$$

6.3 Experimentos Numéricos de Estabilidade do Problema Inverso de Fonte

Nesta seção, estaremos interessados em estudar o seguinte problema direto

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa^2 u = \chi_\omega, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.16)$$

onde $\omega \subset \Omega$ é o suporte estrelado da fonte, cuja fronteira é parametrizada por

$$r(t) = (x_c, y_c) + (b_1 + b_2 \cos(3t))(\cos t, \text{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

com $(x_c, y_c) = (0.4, -0.2)$, $b_1 = 0.3$ e $b_2 = -0.15$, e Ω é a bola unitária aberta em \mathbb{R}^2 , centrada na origem, cuja fronteira é parametrizada por $R(t) = (\cos t, \text{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, como mostrado na figura 6.1a.

Este problema foi resolvido usando MFS, considerando 200 pontos de colocação e 100 pontos de fontes. Assim, obtemos o dado de Neumann original

$$g_\eta(x) := \frac{\partial u}{\partial \eta}(x), \quad x \in \partial\Omega^*,$$

como pode ser visto na figura 6.1b, onde $\partial\Omega^*$ é a fronteira $\partial\Omega$ discretizada no MFS, ou seja, são os valores $R(t_i) = (\cos(t_i), \text{sen}(t_i))$, com $t_i \in [0, 2\pi]$.

Nos experimentos abaixo, consideramos o ruído como uma proporção do valor absoluto de g_η , ou seja, definindo

$$V_{max} := \max_{t \in [0, 2\pi]} |g_\eta(R(t))|,$$

o ruído considerado é uma porcentagem de V_{max} . Além disso, as funções teste consideradas são do tipo exponencial e foram considerados $NP = 7$ parâmetros na expansão de Fourier no algoritmo de Levenberg-Marquardt e $M = 36$ direções.

Experimento 6.3.1. *Neste experimento foi considerado somente um ruído absoluto de 1%, gerando um dado artificial g_η^{art} , como mostrado na figura 6.2a, onde foram considerados 200 pontos de colocação sobre $\partial\Omega$. Este dado foi utilizado no processo de otimização.*

Assim, depois de 7 iterações de 25s cada, em média, o suporte reconstruído está próximo do original, como pode ser visto na figura 6.2b. Além disso, na figura 6.2c,

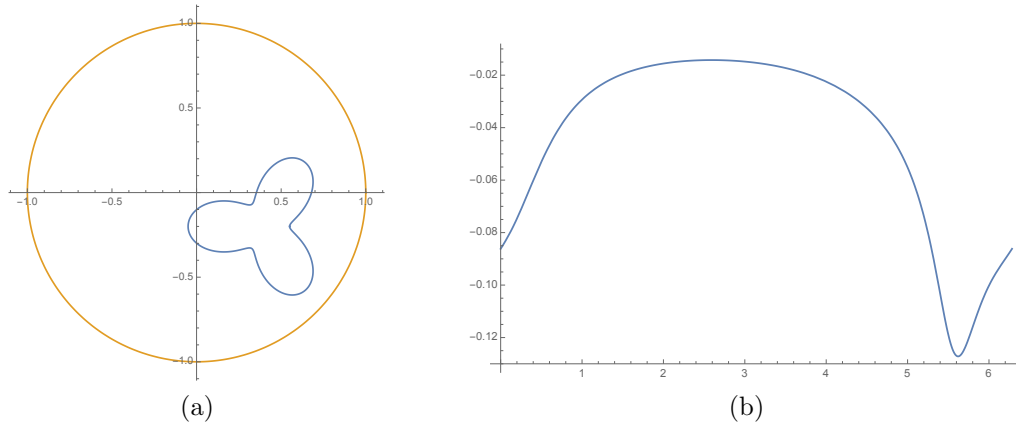


Figura 6.1: Domínio Considerado (a) e dado de Neumann original, g_η (b)

o dado de Neumann em vermelho, calculado pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt, g_η^{LM} , está próximo do dado de Neumann original em azul, g_η .

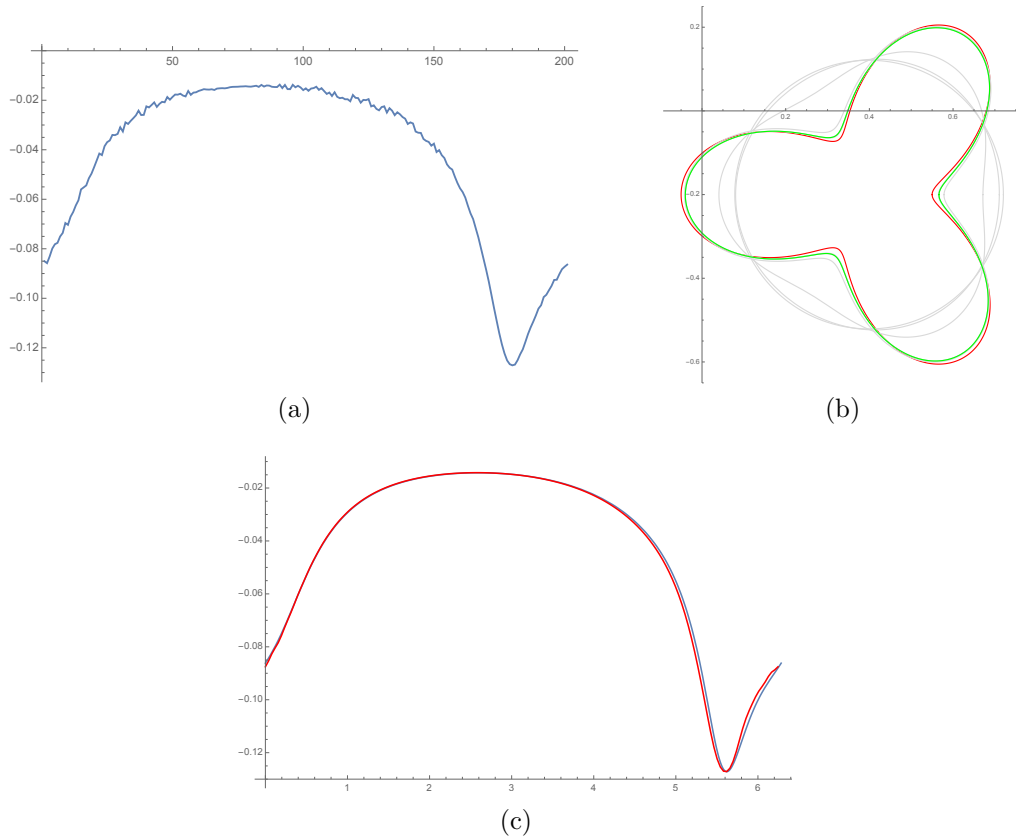


Figura 6.2: Ruído Absoluto 1%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)

Experimento 6.3.2. Neste experimento foi considerado somente um ruído absoluto de 5%, gerando um dado artificial g_η^{art} , como mostrado na figura 6.3a, onde foram considerados 200 pontos de colocação sobre $\partial\Omega$.

Assim, depois de 7 iterações de 25s cada, em média, o suporte reconstruído não está

tão próximo do original quanto o suporte do exemplo anterior, como pode ser visto na figura 6.3b. Apesar desta diferença entre os suportes, na figura 6.3c, o dado de Neumann calculado g_η^{LM} , em vermelho, está relativamente próximo do original g_η , em azul.

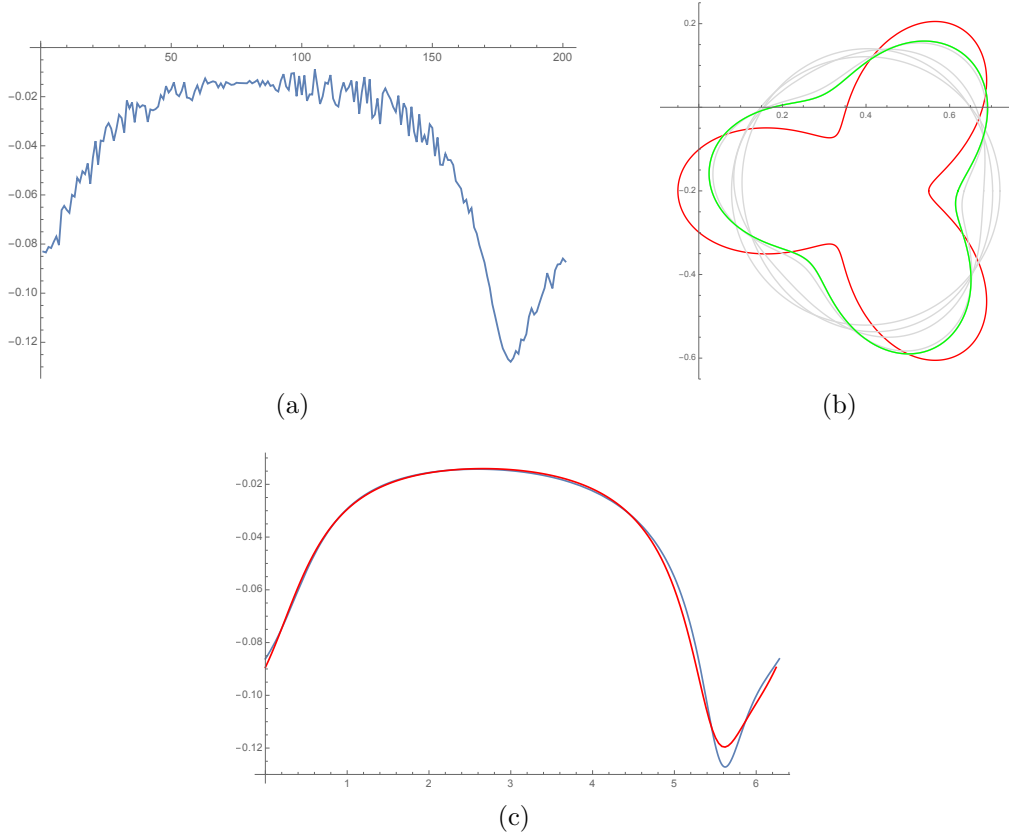


Figura 6.3: Ruído Absoluto 5%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)

Experimento 6.3.3. Neste experimento foi considerado somente ruído absoluto de 10%, gerando um dado artificial g_η^{art} , como mostrado na figura 6.4a, onde foram considerados 200 pontos de colocação sobre $\partial\Omega$.

Logo, depois de 7 iterações, o suporte reconstruído está mostrado na figura 6.4b e na figura 6.4c estão mostrados os dados de Neumann calculado g_η^{LM} , em vermelho, e o original g_η , em azul, com erro maior em comparação com o exemplo anterior de 5%, como esperado.

Experimento 6.3.4. Neste experimento foi considerado somente ruído absoluto de 20%, gerando um dado artificial g_η^{art} , como mostrado na figura 6.5a, onde foram considerados 200 pontos de colocação sobre $\partial\Omega$.

Logo, depois de 7 iterações, o suporte reconstruído está mostrado na figura 6.5b e na figura 6.5c, são mostrados os dados de Neumann calculado g_η^{LM} , em vermelho, e

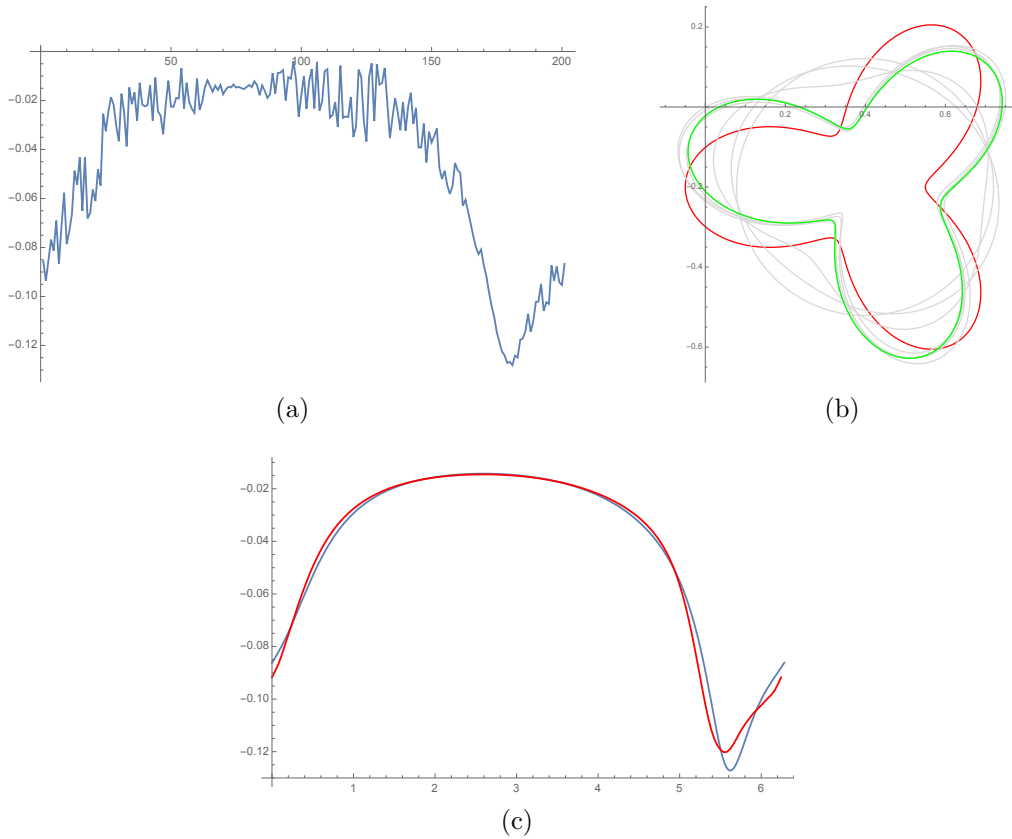


Figura 6.4: Ruído Absoluto 10%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)

o original g_η , em azul, com erro maior em comparação com os experimentos de 1%, 5% e 10%, como esperado.

Experimento 6.3.5. Neste experimento foi considerado somente ruído absoluto de 30%, gerando um dado artificial g_η^{art} , onde foram considerados 200 pontos de colocação sobre $\partial\Omega$, como mostrado na figura 6.6a.

Logo, depois de 7 iterações, o suporte reconstruído está mostrado na figura 6.6b e na figura 6.6c, o dado de Neumann calculado g_η^{LM} , em vermelho, e o original g_η , em azul, são comparados, com erro maior em comparação com todos os experimentos anteriores, tendo em vista que o dado calculado diverge totalmente do dado original.

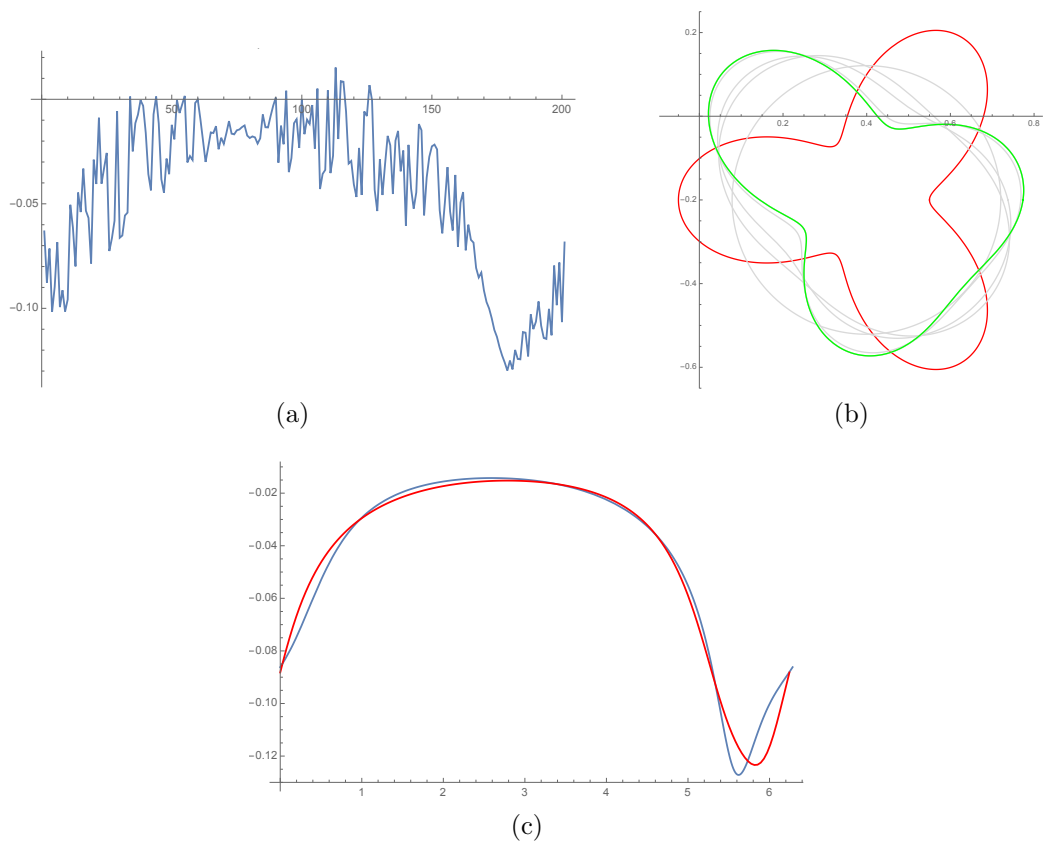
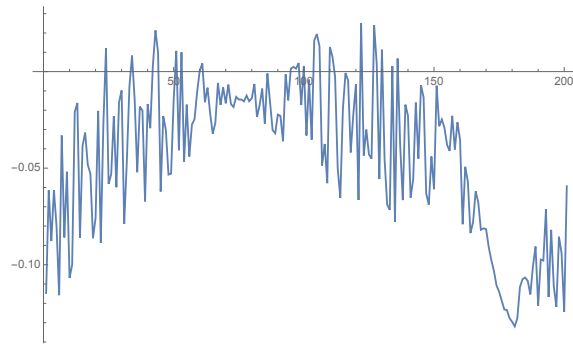
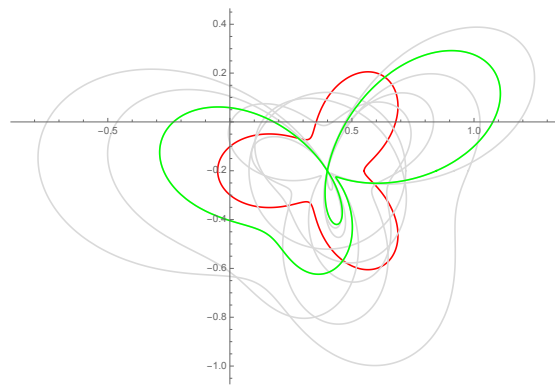


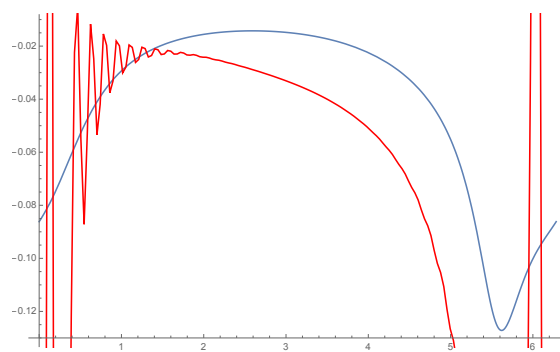
Figura 6.5: Ruído Absoluto 20%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)



(a)



(b)



(c)

Figura 6.6: Ruído Absoluto 30%: Dado Artificial (a), Suporte Reconstruído (b), Dado Original e o Calculado (c)

Capítulo 7

O Problema Inverso de Fonte para Equações Elípticas

Neste capítulo, vamos estudar o problema inverso de fonte para equações elípticas de segunda ordem com coeficientes constantes.

Na seção 7.1, é apresentado o operador elíptico mais geral, onde o objetivo é reduzir este ao operador de advecção-difusão.

Na seção 7.2, vamos apresentar os problemas direto e inverso relacionados ao operador de advecção-difusão. Além disso, também vamos estudar o problema de Helmholtz associado, onde, na seção 7.3, vamos estabelecer alguns resultados sobre o funcional de reciprocidade relacionado a este problema.

Por fim, na seção 7.4, estabeleceremos novos resultados acerca da determinação do centroide para o problema elíptico modificado.

7.1 O Operador Elíptico de Segunda Ordem

Nesta seção vamos considerar um operador diferencial de segunda ordem elíptico e mostrar que um problema posto sobre este operador pode ser reduzido a um novo problema relativo ao operador de difusão-advecção, através de uma mudança de coordenada, ver [54] e [55].

Vamos definir o seguinte operador elíptico de segunda ordem com coeficientes constantes.

Definição 7.1. *Sejam A uma matriz real $N \times N$, simétrica e positiva definida, $b \in \mathbb{R}^N$ e $c \in \mathbb{R}$. Definimos o operador diferencial L como*

$$L : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$Lu := - \operatorname{div} (A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

onde \cdot representa o produto interno usual em \mathbb{R}^N . Além disso, assumimos que

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} < \infty,$$

onde λ_{\min} e λ_{\max} são o menor e o maior autovalor da matriz A , respectivamente.

Observação 7.1. Se $A = aI$, onde I representa a matriz identidade $N \times N$, e $a > 0$ então o operador L reduz-se ao operador de difusão-advecção que será tratado na próxima seção.

Observação 7.2. Note que se $A = (A_{jk}), j, k = 1, 2, \dots, N$, então

$$Lu = - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu.$$

Como comentado no início desta seção, vamos definir uma mudança de coordenada para o operador acima.

Note que como a matriz A é simétrica, positiva definida, então, pelo Teorema Espectral, temos que A admite uma decomposição da seguinte forma

$$A = QDQ^T, \tag{7.1}$$

onde D é uma matriz diagonal $N \times N$, formada pelos autovalores de A , e Q é uma matriz unitária $N \times N$, isto é, $QQ^T = I$, se as entradas da matriz A são números reais, então Q é ortogonal. Logo, um elemento A_{jk} da matriz A pode ser escrito como

$$A_{jk} = \sum_{r'=1}^N \sum_{s'=1}^N Q_{jr'} D_{r's'} Q_{ks'} =: \sum_{r',s'} Q_{jr'} D_{r's'} Q_{ks'},$$

onde $Q = (Q_{jk})$, $D = (D_{jk})$, com $j, k = 1, 2, \dots, N$, onde o somatório acima foi simplificado para a notação não ficar carregada.

Vamos definir uma mudança de variável da seguinte forma. Considere uma matriz simétrica $N \times N$, positiva definida, B , dada por

$$B := QEQ^T,$$

onde Q é a matriz unitária dada em (7.1) e E é uma matriz diagonal $N \times N$ cujos elementos serão determinados posteriormente.

Assim, se $B = (B_{rl})$, com $r, l = 1, 2, \dots, N$, então podemos definir uma nova variável $y \in \mathbb{R}^N$, da seguinte maneira:

$$y = B \cdot x,$$

ou seja,

$$y_r = \sum_{l=1}^N B_{rl}x_l,$$

com $r = 1, 2, \dots, N$, de forma que

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^N B_{rl} \frac{\partial x_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^N B_{rl} \delta_{lj} = B_{rj},$$

com $j = 1, 2, \dots, N$, onde δ_{lj} é a função delta de Kronecker.

Então, com isso, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^N B_{rj} \frac{\partial u}{\partial y_r}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{r=1}^N B_{rj} \frac{\partial u}{\partial y_r} \right) = \sum_{r=1}^N B_{rj} \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{r=1}^N B_{rj} \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\sum_{s=1}^N B_{sk} \frac{\partial u}{\partial y_s} \right) = \sum_{r,s} B_{rj} B_{sk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s}. \end{aligned}$$

com $j, k = 1, 2, \dots, N$. Assim,

$$\sum_{j,k} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{j,k} A_{jk} \sum_{r,s} B_{rj} B_{sk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{j,k;r,s} A_{jk} B_{rj} B_{sk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s}.$$

Como, dados $j, k, r \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$A_{jk} = \sum_{r',s'} Q_{jr'} D_{r's'} Q_{ks'},$$

$$B_{rj} = \sum_{m,n} Q_{rm} E_{mn} Q_{jn}$$

e

$$B_{sk} = \sum_{m',n'} Q_{sm'} E_{m'n'} Q_{kn'},$$

temos que

$$\sum_{j,k} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{\substack{j,k;r,s \\ r',s';m,n \\ m',n'}} Q_{jr'} D_{r's'} Q_{ks'} Q_{rm} E_{mn} Q_{jn} Q_{sm'} E_{m'n'} Q_{kn'} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s}.$$

Observe que, como $QQ^T = I$, temos

$$\sum_{j=1}^N Q_{jr'} Q_{jn} = \delta_{nr'} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^N Q_{ks'} Q_{kn'} = \delta_{s'n'}.$$

Logo,

$$\sum_{j,k} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{\substack{r,s;m,n \\ m',n'}} D_{nn'} Q_{rm} E_{mn} Q_{sm'} E_{m'n'} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s}.$$

Como as matrizes D e E são diagonais, suponha que $D_{nn'} = D_n \delta_{nn'}$, $E_{mn} = E_m \delta_{mn}$ e $E_{m'n'} = E_{m'} \delta_{m'n'}$, onde $m, n, m', n' = 1, 2, \dots, N$. Assim,

$$\sum_{j,k} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{r,s;n} D_n E_n^2 Q_{rn} Q_{sn} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s}.$$

Portanto, definindo $E_n := (D_n)^{-1/2}$, para $n = 1, 2, \dots, N$, obtemos

$$\sum_{j,k} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{r,s;n} Q_{rn} Q_{sn} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{r,s} \delta_{rs} \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_{r=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial y_r^2} = \Delta_y u,$$

onde $\Delta_y u$ representa o Laplaciano de u na nova variável y .

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^N b_j \sum_{r=1}^N B_{rj} \frac{\partial u}{\partial y_r} = \sum_{j,r} b_j B_{rj} \frac{\partial u}{\partial y_r} = \sum_{j,r;m,n} b_j Q_{rm} E_{mn} Q_{jn} \frac{\partial u}{\partial y_r} \\ &= \sum_{j,r} b_j \left(\sum_{m,n} Q_{rm} \frac{\delta_{mn}}{(D_n)^{-1/2}} Q_{jn} \right) \frac{\partial u}{\partial y_r} = \sum_{j,r} b_j A_{rj}^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial y_r} \\ &= \sum_{r=1}^N \left(\sum_{j=1}^N b_j A_{rj}^{-1/2} \right) \frac{\partial u}{\partial y_r}. \end{aligned}$$

Assim, se $\beta_r := \sum_{j=1}^N b_j A_{rj}^{-1/2}$, para $r = 1, 2, \dots, N$, então

$$\sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial u}{\partial y_r} = \beta \cdot \nabla_y u,$$

onde $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ e $\nabla_y u$ representa o vetor gradiente da função u na nova variável y .

Portanto, através da mudança $y = B \cdot x$, com $B = QEQ^T$, onde os elementos da matriz diagonal E são iguais a $E_{mn} = |D_n|^{-1/2} \delta_{mn}$, o operador

$$Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

escrito na variável x , torna-se, na variável y , o operador

$$Du = -\Delta_y u + \beta \cdot \nabla u + cu,$$

conhecido como *operador de difusão-advecção*, que será estudado nas próximas seções.

Desta forma, mostramos que se A é uma matriz $N \times N$ simétrica, positiva definida, então ao invés de estudarmos o problema geral para o operador Lu , é suficiente estudarmos o problema para o operador de difusão-advecção.

7.2 O Problema de Advecção-Difusão Estacionário

Nesta seção vamos apresentar os problemas direto e inverso relacionados ao operador de advecção-difusão, como mostrado na seção anterior.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, limitado e conexo com fronteira, $\partial\Omega$, regular e os parâmetros $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ e $c \in \mathbb{R}$.

Dados os parâmetros, o termo fonte $f \in L^2(\Omega)$ e o dado de Dirichlet $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -a\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.2)$$

O problema (7.2) admite uma única solução em $H^1(\Omega)$, ver [48]. De forma análoga à seção 3.1, definimos *problema direto* para o operador de advecção-difusão como sendo o problema de determinar $\frac{\partial u}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, a partir do termo fonte f e do dado de Dirichlet g .

Por outro lado, o *problema inverso de fonte* associado a (7.2), é posto da seguinte maneira: Dados os parâmetros a, b e c , a condição de Cauchy $\{g, g_\eta\} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, encontrar o termo fonte f e uma função $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} -a\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_\eta, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.3)$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Quando consideramos que a solução e os dados de Cauchy estão nos espaços de funções usuais utilizados na formulação do problema direto, o problema acima é mal posto no sentido de Hadamard, [7]. De fato, podemos considerar o seguinte

problema para exemplificar a não unicidade da solução.

Exemplo 7.1. *Considere o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$ e os parâmetros $a = c = 1$ e $b = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que o dado de Cauchy seja nulo, ou seja, que $g = 0$ e $g_\eta = 0$, sobre $\partial\Omega$. Logo, observe que as funções $u_1, u_2 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$u_1(x) = -2\|x\|^4 + 4\|x\|^2 - 2 \quad e \quad u_2(x) = -\|x\|^6 + 3\|x\|^2 - 2,$$

satisfazem

$$\begin{cases} -a\Delta u_i + b \cdot \nabla u_i + cu_i = f_i, & \text{em } \Omega; \\ u_i = 0, & \text{sobre } \partial\Omega; \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.4)$$

para $i = 1, 2$, onde

$$f_1(x) = -2\|x\|^4 + 36\|x\|^2 + 8(1 - \|x\|^2)x \cdot (1, 1) - 18,$$

e

$$f_2(x) = -\|x\|^6 + 36\|x\|^4 + 3\|x\|^2 + 6(1 - \|x\|^4)x \cdot (1, 1) - 14,$$

para todo $x \in \Omega$. Portanto, as fontes f_1 e f_2 são duas soluções distintas do problema inverso de fontes (7.4), além da solução trivial.

Um caminho para obter boa colocação do problema inverso 7.3 seria supor informações *a priori* do termo fonte que esperamos reconstruir. Esta suposição é feita restringindo o espaço onde estamos supondo que a fonte pertença, como feito nos capítulos anteriores.

Observação 7.3. *Outro caminho para contornar esta deficiência consiste geralmente na reformulação do problema inverso através de problemas aproximados bem postos. Estes tipos de métodos são conhecidos como métodos de regularização. Um método de regularização bem conhecido é o método de regularização de Tikhonov. Este método entre outros podem ser encontrados em [11].*

No capítulo 4, foi demonstrada uma nova equação para a obtenção do centroide para equações de Helmholtz, quando o termo fonte consistia de uma única fonte pontual e quando o termo fonte consistia de uma função característica da forma $\chi_\omega(x)$, onde $\omega \subset \Omega$ era estrelado.

Neste capítulo vamos generalizar esta equação para a equação de advecção-difusão e, conseqüentemente, para equações elípticas de segunda ordem, com coeficientes constantes, tendo em vista a seção 7.1.

7.2.1 A Formulação Variacional para o Problema Elíptico Modificado

Nesta seção vamos mostrar que o problema inverso posto sobre o operador de advecção-difusão pode ser reduzido ao problema posto sobre o operador de Helmholtz, ou seja, vamos fazer uma mudança de variável no problema 7.3, para que possamos reescrever este problema como um problema de reconstrução de fonte para a equação de Helmholtz. Além disso, vamos definir um espaço de funções adequado para estudar a formulação variacional deste problema modificado, ou seja, do problema para o novo operador.

Como visto no capítulo 1, existem várias referências sobre o problema inverso de reconstrução de fontes para a equação de Helmholtz, que pode ser visto como um caso particular do problema de Dirichlet e também como o caso particular da equação de advecção-difusão com $b = \vec{0}$.

Considere, então, a mudança de variável

$$u(x) = e^{\frac{1}{2a}b \cdot x} \tilde{u}(x), \quad (7.5)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Desta forma, temos que a equação em (7.3) pode ser reescrita como

$$-a\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = e^{\frac{1}{2a}b \cdot x} \left(-a\Delta \tilde{u}(x) + \left(c + \frac{\|b\|^2}{4a} \right) \tilde{u}(x) \right).$$

Logo, denotando

$$\lambda = \frac{c}{a} + \frac{\|b\|^2}{4a^2}, \quad (7.6)$$

temos que o problema 7.3 pode ser reescrito como o seguinte problema, tomando $\tilde{u} = u$, por simplicidade:

Dados o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ e a condição de Cauchy $g, g_\eta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar o termo fonte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{cases} (-\Delta + \lambda)u = \frac{1}{a}f(x)e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x}, & \text{em } \Omega; \\ u = ge^{-\frac{1}{2a}b \cdot x}, & \text{sobre } \partial\Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_\eta e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} - \frac{1}{2a}g(b \cdot \eta)e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x}, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.7)$$

Portanto, é suficiente estudarmos o problema acima.

Observação 7.4. Como $c \in \mathbb{R}$, podemos obter 3 problemas distintos, ou seja, temos a seguinte configuração:

- $c < -\frac{\|b\|^2}{4a} \implies \lambda < 0$: Equação de Helmholtz;
- $c = -\frac{\|b\|^2}{4a} \implies \lambda = 0$: Equação de Laplace;

- $c > -\frac{\|b\|^2}{4a} \implies \lambda > 0$: Equação de Helmholtz Modificada;

Observação 7.5. Seguindo as ideias de [5], é possível mostrar que é suficiente estudar o problema 7.3, ou ainda o problema (7.7), considerando o dado de Dirichlet nulo, ou seja, considerando $g \equiv 0$, sobre $\partial\Omega$. De fato, suponha que f seja solução do problema inverso associado ao sistema

$$\begin{cases} -a\Delta w + b \cdot \nabla w + cw = f, & \text{em } \Omega; \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega; \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = g_\eta - \frac{\partial v}{\partial \eta}, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.8)$$

onde v é solução do problema direto

$$\begin{cases} -a\Delta v + b \cdot \nabla v + cv = 0, & \text{em } \Omega; \\ v = g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.9)$$

Assim, como a fonte f é conhecida em (7.8), pode-se encontrar a solução w . Desta forma, definindo $u := w + v$, obtemos que f também é solução do problema (7.3). De forma análoga, é possível mostrar que se f é solução do problema (7.3), então f também será solução do problema inverso (7.8).

De forma análoga ao capítulo 3, vamos definir o espaço das funções teste, seguindo as ideias de [5]

$$\mathcal{H}_\lambda(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); (-\Delta + \lambda)v = 0\}.$$

Assim, dada $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, supondo que f seja solução do problema (7.7), multiplicando a fonte f pela função teste v e integrando em Ω , obtemos que

$$\int_{\Omega} [(-\Delta + \lambda)u]v \, dx = \frac{1}{a} \int_{\Omega} f(x)e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} v \, dx.$$

Note que se $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, então $\Delta v = \lambda v$, em Ω . Logo, pela segunda identidade de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \left(g_\eta e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} - \frac{1}{2a} g b \cdot \eta e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} \right) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto, como a função teste $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$ foi arbitrária, obtemos que se f é solução do problema 7.7, então f é solução do seguinte problema variacional:

Dada a condição de Cauchy $g, g_\eta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar o termo fonte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal

que

$$\frac{1}{a} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} v(x) dx = \int_{\partial\Omega} g e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \left(g_{\eta} e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} - \frac{1}{2a} g b \cdot \eta e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} \right) d\sigma, \quad (7.10)$$

para toda função $v \in \mathcal{H}_{\lambda}(\Omega)$.

Observação 7.6. *A volta também é verdadeira, ou seja, se f é solução do problema variacional 7.10, então f também é solução do problema 7.7 supondo uma condição adicional, [52]. Além disso, em [5] também é mostrado que $\mathcal{H}_{\lambda}(\Omega)$ é homeomorfo a $H^{1/2}(\partial\Omega)$.*

7.3 O Funcional de Reciprocidade para o Problema Elíptico Modificado

Nesta seção, estaremos interessados em definir alguns operadores integrais relacionados à formulação variacional e estudar algumas propriedades destes.

Definição 7.2. *O Funcional de Reciprocidade associado ao problema elíptico modificado (7.7) é definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[f_m](v) &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} g e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \left(g_{\eta} e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} - \frac{1}{2a} g (b \cdot \eta) e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde $v \in \mathcal{H}_{\lambda}(\Omega)$ e g, g_{η} são os dados de Cauchy relacionados ao problema elíptico (7.3) e f_m é a fonte modificada dada por

$$f_m(x) = \frac{1}{a} f(x) e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x}.$$

Observação 7.7. *Note que este funcional relaciona o termo fonte f_m com o dado de Cauchy na fronteira do problema elíptico (7.3). Neste caso, como temos uma equação de Helmholtz, através da identidade de Green, foi possível "transmitir" a informação relativa ao coeficiente $b \cdot \nabla u$, do problema elíptico (7.3), para a fronteira do domínio do problema modificado (7.7), gerando mais termos no funcional de reciprocidade.*

Observação 7.8. *Note que, pela Identidade de Green, podemos reescrever o problema variacional 7.10 como o problema de determinar o termo fonte f , tal que*

$$\mathcal{R}[f_m](v) = \frac{1}{a} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x} v(x) dx, \quad (7.12)$$

para toda função $v \in \mathcal{H}_\lambda(\Omega)$, onde $\mathcal{R}[f_m](v)$ é dado por (7.11).

Considere a função teste $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$, onde $x \in \Omega$, $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ é arbitrário e $\kappa := \sqrt{\lambda}$, onde $\kappa \in \mathbb{R}^*$, se $\lambda > 0$, e $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se $\lambda < 0$. No caso em que κ é um número complexo ($\lambda < 0$), v é conhecida como *onda plana*.

Logo, o funcional de reciprocidade para a equação de Helmholtz com termo fonte f_m , calculado na função teste $v_\varphi(x)$ é dado por $\mathcal{R}[f_m](e^{\kappa\varphi \cdot x})$, onde, por simplicidade, vamos denotar este funcional por $\mathcal{R}[f_m](\varphi)$, onde $\mathcal{R}[f_m](\varphi)$ é dado por

$$\mathcal{R}[f_m](\varphi) = \int_{\partial\Omega} g\kappa(\varphi \cdot \eta)e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot x} - g_\eta e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot x} + \frac{1}{2a}g(b \cdot \eta)e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot x} d\sigma. \quad (7.13)$$

Observação 7.9. Note que se $b = \vec{0}$, então

$$\mathcal{R}[f_m](\varphi) = \int_{\partial\Omega} g\kappa(\varphi \cdot \eta)e^{\kappa\varphi \cdot x} - g_\eta e^{\kappa\varphi \cdot x} d\sigma$$

é o funcional de reciprocidade do problema

$$\begin{cases} (-\Delta + \kappa^2)u = \frac{1}{a}f, & \text{em } \Omega; \\ u = g, & \text{sobre } \partial\Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_\eta, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.14)$$

considerando função teste do tipo exponencial $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$.

Por outro lado, se $b \neq \vec{0}$, então podemos associar o funcional de reciprocidade $\mathcal{R}[f_m](\varphi)$, dado por (7.13), ao problema de Helmholtz

$$\begin{cases} (-\Delta + \kappa^2)u = f_m, & \text{em } \Omega, \\ u = \tilde{g}, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \tilde{g}_\eta, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.15)$$

onde

$$f_m = \frac{1}{a}f e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x}, \quad \tilde{g} = g e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} \quad e \quad \tilde{g}_\eta = g_\eta e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} - \frac{1}{2a}b \cdot \eta e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} g.$$

Observe que se $f_m = \chi_\omega$, em (7.15), então sabemos determinar o centroide do suporte, ω , a partir de medições na fronteira do domínio Ω , conforme teorema 4.2.

Entretanto, se considerarmos $f = \chi_\omega$, ou seja, que a fonte do problema inverso de difusão-advecção seja característica, então temos que estudar um pouco mais sobre a determinação do centroide desta nova fonte no problema de Helmholtz.

7.4 A Fórmula do Centroide para o Problema Elíptico Modificado

Nesta seção, vamos estabelecer novos resultados sobre a determinação e unicidade do centroide de fontes características e da posição de uma única fonte pontual para o problema elíptico modificado (7.7). Este resultado é mais geral em comparação com os teoremas 4.2 e 4.5.

7.4.1 Caso Fonte Característica

Nesta subseção vamos estudar o caso em que temos uma fonte característica para o problema elíptico (7.3), da forma

$$f(x) = \chi_\omega(x),$$

onde ω é um subconjunto aberto, conexo e limitado $\omega \subset \Omega$. Com isto, o termo fonte, f_m , relacionado ao problema modificado (7.7) será da forma

$$f_m(x) = \frac{1}{a} \chi_\omega(x) e^{-\frac{1}{2a} b \cdot x}, \quad (7.16)$$

onde, neste caso, vamos denotá-lo por $f_c(x) := f_m(x)$.

Note que tomando a função teste $v_\varphi^p(x) = e^{\kappa \varphi \cdot (x-p)}$ em (7.11), onde $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ e $p \in \mathbb{R}^N$ são arbitrários e $\kappa = \sqrt{\lambda} \neq 0$, temos que o funcional de reciprocidade relacionado será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[f_c](v_\varphi^p) &= e^{-\frac{1}{2a} b \cdot p} \int_{\partial\Omega} g\kappa(\varphi \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} - g_\eta e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} \\ &\quad + \frac{1}{2a} g(b \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} d\sigma. \end{aligned}$$

Logo, definindo o funcional de reciprocidade *centrado no ponto* $p \in \mathbb{R}^N$ como

$$\mathcal{R}^p[f_c](\varphi) := \int_{\partial\Omega} g\kappa(\varphi \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} - g_\eta e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} + \frac{1}{2a} g(b \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa} b) \cdot (x-p)} d\sigma,$$

temos que

$$\mathcal{R}[f_c](v_\varphi^p) = e^{-\frac{1}{2a} b \cdot p} \mathcal{R}^p[f_c](\varphi). \quad (7.17)$$

Observação 7.10. Note que se $p = \vec{0}$, temos que

$$\mathcal{R}^0[f_c](\varphi) = \mathcal{R}[f_c](\varphi),$$

onde $\mathcal{R}[f_c](\varphi)$ é dado por (7.13).

Por outro lado, por (3.4), temos que

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2a}b \cdot p} \mathcal{R}^p[f_c](\varphi) &= \mathcal{R}[f_c](v_\varphi^p) \\
&= \int_{\Omega} e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} f_c dx \\
&= \frac{1}{a} \int_{\omega} e^{\kappa\varphi \cdot (x-p)} e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x} dx \\
&= \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2a}b \cdot p} \int_{\omega} e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot (x-p)} dx.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{R}^p[f_c](\varphi) = \frac{1}{a} \int_{\omega} e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot (x-p)} dx. \quad (7.18)$$

Observação 7.11. Note que substituindo $v(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$ e $f(x) = \chi_{\omega}(x)$ em (7.12), obtemos uma expressão similar a (7.18), porém centrada na origem, ou seja, $p = \vec{0}$. Desta forma, é possível determinar uma mudança de variável, cujo determinante Jacobiano é igual a 1 (translação), de tal forma que $p \in \mathbb{R}^N$ seja a origem do sistema de coordenadas.

A seguir, vamos supor que a origem do sistema de coordenadas seja o centroide de um conjunto estrelado, ou seja, vamos supor que $p \in \mathbb{R}^N$, a princípio arbitrário, seja o centroide de um subconjunto estrelado de Ω .

Assim, por (3.5) e (7.18), podemos definir o seguinte operador integral *centrado no ponto* p

$$F^p[f_c](\varphi) := \frac{1}{a} \int_{\omega} e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot (x-p)} dx.$$

Além disso, como estamos supondo p como o centroide do conjunto $\omega \subset \Omega$, então podemos parametrizar $\partial\omega$ por uma função $R : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, que mede a distância entre o centroide e o ponto correspondente em $\partial\omega$, de forma que

$$F^p[f_c](\varphi) = F^p[R](\varphi) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot \theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.$$

De forma análoga ao capítulo 4, é possível estabelecer os seguintes teoremas equivalentes sobre o operador F^p :

Teorema 7.1. Se $\omega \subset \Omega$ é um conjunto estrelado com fronteira parametrizada por uma função $R \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$, então $F^p[R] \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Além disso, existe uma constante $C = C(N) > 0$, tal que

$$\|F^p[R]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \geq C \|R\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}^N.$$

e

Teorema 7.2. *Dados $R_1, R_2 \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$, então existe uma constante $C = C(N) > 0$, tal que*

$$\|F^p[R_1] - F^p[R_2]\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})} \leq C\|R_1 - R_2\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})},$$

ou seja, o operador F^p é contínuo em $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$.

Entretanto, com relação a proposição 4.1, temos um resultado semelhante para o operador F^p , que será importante para estabelecer a nova fórmula do centroide.

Proposição 7.3. *Seja $\omega \subset \Omega$ um conjunto estrelado, cuja fronteira, $\partial\omega$, é parametrizada pela função $R \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$. Então*

$$F^p[R](\varphi) = F^p[R]\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right), \quad \forall \varphi \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga ao teorema 4.1. De fato, seja $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ uma direção arbitrária. Defina

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \frac{1}{2a\kappa}b$$

e os conjuntos

$$\mathbb{S}_{\pm}^{\tilde{\varphi}} := \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; \pm\tilde{\varphi} \cdot \theta > 0\}$$

e

$$\mathbb{S}_0^{\tilde{\varphi}} := \{\theta \in \mathbb{S}^{N-1}; \tilde{\varphi} \cdot \theta = 0\}.$$

Logo, $\mathbb{S}^{N-1} = \mathbb{S}_-^{\tilde{\varphi}} \cup \mathbb{S}_0^{\tilde{\varphi}} \cup \mathbb{S}_+^{\tilde{\varphi}}$ e, então,

$$\begin{aligned} F^p[R](\varphi) &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_+^{\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta + \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_0^{\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\ &\quad + \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_-^{\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
F^p[R] \left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa} b \right) &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_+^{-\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta + \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_0^{-\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} \rho^{N-1} d\rho d\theta \\
&\quad + \frac{1}{a} \int_{\mathbb{S}_-^{-\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.
\end{aligned}$$

Assim, como $\mathbb{S}_\pm^{-\tilde{\varphi}} = \mathbb{S}_\mp^{\tilde{\varphi}}$ e $\mathbb{S}_0^{-\tilde{\varphi}} = \mathbb{S}_0^{\tilde{\varphi}}$, então

$$\int_{\mathbb{S}_+^{-\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta = \int_{\mathbb{S}_-^{\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta,$$

e

$$\int_{\mathbb{S}_-^{-\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{-\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta = \int_{\mathbb{S}_+^{\tilde{\varphi}}} \int_0^{R(\theta)} e^{\kappa\rho\tilde{\varphi}\cdot\theta} \rho^{N-1} d\rho d\theta.$$

Portanto,

$$F^p[R](\varphi) = F^p[R] \left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa} b \right).$$

Desta forma, como φ é arbitrário, temos que $F^p[R](\varphi) = F^p[R] \left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa} b \right)$, para todo $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$. \square

Assim, pelo teorema 7.3 e por (7.18), temos que

$$\mathcal{R}^p[f_c](\varphi) = \mathcal{R}^p[f_c] \left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa} b \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} g\kappa(\varphi \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} - g_\eta e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} + \frac{1}{2a} g(b \cdot \eta) e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} g\kappa\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right) \cdot \eta e^{\kappa(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} - g_\eta e^{\kappa(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} + \frac{1}{2a} g(b \cdot \eta) e^{\kappa(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot(x-p)} d\sigma.
\end{aligned}$$

Logo, tendo em vista (7.16), temos que, por (7.13)

$$e^{-\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot p} \mathcal{R}[f_c](\varphi) = e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b)\cdot p} \mathcal{R}[f_c] \left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa} b \right),$$

Portanto, temos que

$$e^{2\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot p} = \frac{\mathcal{R}[f_c](\varphi)}{\mathcal{R}[f_c](-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b)},$$

ou seja,

$$\left(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b\right) \cdot p = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[f_c](\varphi)}{\mathcal{R}[f_c](-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b)} \right), \quad (7.19)$$

para todo $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Assim, observe que estabelecemos o seguinte teorema de caracterização do centroide do suporte de uma fonte característica no problema inverso de difusão-advecção (7.3).

Teorema 7.4. *Sejam $\omega \subset \Omega$ um subconjunto estrelado e o termo fonte $f(x) = \chi_\omega(x)$ para o problema inverso (7.3), onde os parâmetros a, b e c devem satisfazer*

$$\sum_{i=1}^N b_i \neq \sqrt{4ca + \|b\|^2}. \quad (7.20)$$

Então o centroide, p , do conjunto ω pode ser determinado por

$$\left(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b\right) \cdot p = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[f_c](\varphi)}{\mathcal{R}[f_c](-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b)} \right), \quad (7.21)$$

onde $\mathcal{R}[f_c](\varphi)$ é dado por (7.13), fazendo $f_m = f_c$, com $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Demonstração. Note que a fórmula (7.21), obtida anteriormente, pode ser vista como um sistema linear. De fato, como $b = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor conhecido, para determinarmos a posição da fonte pontual, podemos tomar $\varphi = e_i \in \mathbb{S}^{N-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$, vetores da base canônica de \mathbb{R}^N , e resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} (1 - \frac{1}{2a\kappa}b_1)p_1 - \frac{1}{2a\kappa}b_2p_2 - \dots - \frac{1}{2a\kappa}b_Np_N & = B_1 \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1p_1 + (1 - \frac{1}{2a\kappa}b_2)p_2 - \dots - \frac{1}{2a\kappa}b_Np_N & = B_2 \\ & \vdots \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1p_1 - \frac{1}{2a\kappa}b_2p_2 - \dots + (1 - \frac{1}{2a\kappa}b_N)p_N & = B_N, \end{cases} \quad (7.22)$$

onde p_1, p_2, \dots, p_N são as coordenadas que devemos determinar do centroide p e

$$B_i = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[f_c](e_i)}{\mathcal{R}[f_c](-e_i + \frac{1}{a\kappa}b)} \right),$$

com $i = 1, 2, \dots, N$. Este sistema possui solução se, e somente se, a matriz $N \times N$

relativa aos coeficientes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_1 & -\frac{1}{2a\kappa}b_2 & -\frac{1}{2a\kappa}b_3 & \cdots & -\frac{1}{2a\kappa}b_N \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1 & 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_2 & -\frac{1}{2a\kappa}b_3 & \cdots & -\frac{1}{2a\kappa}b_N \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1 & -\frac{1}{2a\kappa}b_2 & 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_3 & \cdots & -\frac{1}{2a\kappa}b_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1 & -\frac{1}{2a\kappa}b_2 & -\frac{1}{2a\kappa}b_3 & \cdots & 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_N \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

é tal que $\det A \neq 0$.

Desta forma, substituindo cada linha i pelo resultado da subtração da linha i pela linha $i + 1$, para $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, obtemos a seguinte matriz $N \times N$, denotada por $A_{[1:N]}$,

$$A_{[1:N]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_1 & -\frac{1}{2a\kappa}b_2 & -\frac{1}{2a\kappa}b_3 & -\frac{1}{2a\kappa}b_4 & \cdots & -\frac{1}{2a\kappa}b_{N-1} & 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_N \end{pmatrix}.$$

De maneira geral, definimos a matriz $A_{[i:N]}$, $(N - i + 1) \times (N - i + 1)$, com $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, como sendo a matriz

$$A_{[i:N]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2a\kappa}b_i & -\frac{1}{2a\kappa}b_{i+1} & -\frac{1}{2a\kappa}b_{i+2} & -\frac{1}{2a\kappa}b_{i+3} & \cdots & -\frac{1}{2a\kappa}b_{N-1} & 1 - \frac{1}{2a\kappa}b_N \end{pmatrix}$$

e a matriz C_{N-1} , como sendo a matriz $(N-1) \times (N-1)$,

$$C_{N-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

cujo determinante é $\det C_{N-1} = (-1)^{N-1}$.

Assim, para determinar o valor de $\det A$, podemos calcular o determinante de $A_{[1:N]}$ utilizando o métodos dos cofatores, ou seja,

$$\begin{aligned} \det A_{[1:N]} &= \det A_{[2:N]}(-1)^{1+1} + \left(-\frac{1}{2a\kappa}b_1\right) (\det C_{N-1}) (-1)^{N+1} \\ &= \det A_{[2:N]} + \left(-\frac{1}{2a\kappa}b_1\right) (-1)^{2N} \\ &= \det A_{[2:N]} - \frac{1}{2a\kappa}b_1. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \det A_{[2:N]} &= \det A_{[3:N]}(-1)^{2+2} + \left(-\frac{1}{2a\kappa}b_2\right) (\det C_{N-2}) (-1)^{N+2}. \\ &= \det A_{[3:N]} + \left(-\frac{1}{2a\kappa}b_2\right) (-1)^{2N} \\ &= \det A_{[3:N]} - \frac{1}{2a\kappa}b_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\det A_{[1:N]} = \det A_{[3:N]}(-1) - \frac{1}{2a\kappa}b_1 - \frac{1}{2a\kappa}b_2.$$

Desta forma, por indução finita, obtemos que

$$\begin{aligned}
\det A_{[1:N]} &= \det A_{[N-1:N]} (-1)^{(N-2)+(N-2)} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2a\kappa} b_{N-2} \right) (\det C_2) (-1)^{N+(N-2)} - \sum_{i=1}^{N-3} \frac{1}{2a\kappa} b_i \\
&= \det A_{[N-1:N]} + \left(-\frac{1}{2a\kappa} b_{N-2} \right) (-1)^{2N} - \sum_{i=1}^{N-3} \frac{1}{2a\kappa} b_i \\
&= 1 - \frac{1}{2a\kappa} b_N - \frac{1}{2a\kappa} b_{N-1} - \frac{1}{2a\kappa} b_{N-2} - \sum_{i=1}^{N-3} \frac{1}{2a\kappa} b_i \\
&= 1 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2a\kappa} b_i.
\end{aligned}$$

Assim, como $\kappa = \sqrt{\lambda}$, temos que, por (7.6),

$$\det A = 1 - \frac{1}{\sqrt{4ca + \|b\|^2}} \sum_{i=1}^N b_i.$$

Portanto, para que o sistema linear possua solução, ou seja, para que $\det A \neq 0$, precisamos que os parâmetros do problema de difusão-advecção (7.3) satisfaçam

$$\sum_{i=1}^N b_i \neq \sqrt{4ca + \|b\|^2}. \quad (7.25)$$

□

Observação 7.12. No caso em que $b = \vec{0}$, temos que

$$\sum_{i=1}^N b_i = 0 \neq 1 = \det A,$$

onde o sistema linear sempre possui uma única solução.

Desta forma, podemos estabelecer o seguinte resultado de unicidade da reconstrução do centroide pela nova fórmula proposta.

Corolário 7.1 (Unicidade do Centroide). *Sejam χ_{ω_1} e χ_{ω_2} duas fontes características para o problema (7.3), com $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$ subconjuntos estrelados, onde os parâmetros do problema satisfazem a condição (7.20). Se estas fontes produzem o mesmo dado de Cauchy na fronteira, então estas possuem o mesmo centroide.*

Demonstração. Considere as fontes χ_{ω_1} e χ_{ω_2} para o problema (7.3). Suponha que estas fontes geram o mesmo dado de Cauchy sobre a fronteira. Logo, estas fontes

geram o mesmo funcional de reciprocidade com função teste do tipo exponencial $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$. Assim, se p_1 e p_2 denotarem os centroides das fontes χ_{ω_1} e χ_{ω_2} , respectivamente, então observe que, pelo Teorema 7.4, obtemos que

$$\left(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b\right) \cdot p_1 = \left(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b\right) \cdot p_2,$$

para todo $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Por outro lado, temos

$$Ap_1 = Ap_2,$$

onde A é a matriz inversível dada por (7.23). Logo, $A(p_1 - p_2) = 0$, e, portanto, $p_1 = p_2$. \square

7.4.2 Caso Fonte Pontual

Nesta subsecção vamos estudar o caso em que temos uma fonte pertencente à classe de fontes pontuais.

Primeiramente, considere que o termo fonte é composto por somente uma fonte pontual no problema elíptico (7.3), ou seja, que

$$f_{pe}(x) = \beta\delta_S(x),$$

onde $\delta_S(x)$ é a distribuição delta de Dirac centrada no ponto $S \in \mathbb{R}^N$ e $\beta > 0$ é a intensidade desta fonte. Logo, tomando $v_\varphi(x) = e^{\kappa\varphi \cdot x}$ em (7.12), com $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$, e $\kappa = \sqrt{\lambda}$,

$$\mathcal{R}[f_{pe}](\varphi) = \frac{\beta}{a} e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot S}, \forall \varphi \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Assim, como

$$\mathcal{R}[f_{pe}]\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right) = \frac{\beta}{a} e^{\kappa(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot S},$$

temos que, a intensidade da fonte pontual pode ser determinada da seguinte forma

$$\beta = a \sqrt{\mathcal{R}[f_{pe}](\varphi) \mathcal{R}[f_{pe}]\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right)}. \quad (7.26)$$

Observe que a intensidade da fonte pontual não depende da direção $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$ escolhida, como esperado. Além disso, tendo em vista que

$$\frac{\mathcal{R}[f_{pe}](\varphi)}{\mathcal{R}[f_{pe}]\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right)} = \frac{e^{\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot S}}{e^{\kappa(-\varphi + \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot S}} = \frac{e^{2\kappa\varphi \cdot S}}{e^{\frac{1}{a}b \cdot S}} = e^{2\kappa(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b) \cdot S},$$

a posição da fonte pontual pode ser determinada da seguinte forma

$$\left(\varphi - \frac{1}{2a\kappa}b\right) \cdot S = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\mathcal{R}[f_{pe}](\varphi)}{\mathcal{R}[f_{pe}]\left(-\varphi + \frac{1}{a\kappa}b\right)} \right), \quad (7.27)$$

onde $\varphi \in \mathbb{S}^{N-1}$.

Note que estabelecemos o seguinte resultado de caracterização e unicidade de fontes pontuais para o problema inverso de difusão-advecção (7.3).

Teorema 7.5. *Suponha que o termo fonte do problema inverso (7.3) seja da forma $f_{pe}(x) = \beta\delta_S(x)$, onde os parâmetros a, b e c devem satisfazer*

$$\sum_{i=1}^N b_i \neq \sqrt{4ca + \|b\|^2}. \quad (7.28)$$

Então sua intensidade é dada por (7.26) e sua posição é dada por (7.27).

Observação 7.13. *Note que o sistema linear que define a posição desta fonte pontual é o mesmo que define o centroide do suporte no caso de fontes características. Assim, para garantirmos a existência (relacionada com a resolução deste sistema) e a unicidade na determinação da fonte pontual precisamos supor a condição sobre os parâmetros (7.28) no problema elíptico (7.3).*

Corolário 7.2. *Considere as fontes pontuais para o problema (7.7), onde os parâmetros satisfazem (7.28), dadas por $f_1(x) = \beta_1\delta_{S_1}(x)$ e $f_2(x) = \beta_2\delta_{S_2}(x)$. Se f_1 e f_2 geram o mesmo dado de Cauchy na fronteira, então $f_1 = f_2$.*

Considere, agora, que o termo fonte para o problema inverso (7.3) é composto por uma combinação linear de fontes pontuais da forma

$$f_{pe}(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{S_i}(x).$$

Com este termo fonte, é possível estabelecer um resultado de unicidade de combinação de fontes pontuais análogo ao teorema 4.6.

Teorema 7.6. *Considere as fontes para o problema (7.3), onde os parâmetros satisfazem (7.28), dadas por $f_1(x) = \sum_{i=1}^{M_1} \beta_i \delta_{S_i}(x)$ e $f_2(x) = \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j \delta_{Z_j}(x)$, onde S_i e Z_j são distintos entre si. Se f_1 e f_2 geram o mesmo dado de Cauchy na fronteira, então $f_1 = f_2$, ou seja, $M_1 = M_2$, $\beta_i = \lambda_i$ e $S_i = Z_i$, para $i = 1, 2, \dots, M_1$.*

Demonstração. Seja u_i solução do problema (7.7) com termo fonte f_i , $i = 1, 2$. Logo, considerando as funções $u := u_1 - u_2$ e $F := \frac{1}{a}e^{-\frac{1}{2a}b \cdot x}(f_1(x) - f_2(x))$, temos que u é

solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa^2 u = F, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A partir deste ponto, a demonstração é análoga à do teorema 4.6.

□

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido nesta tese, conforme consta na seção 8.1. Além disso, na seção 8.2, são apresentadas propostas de trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente.

8.1 Conclusões

Neste trabalho estudamos o problema inverso de fonte para equações de Helmholtz. Em primeiro lugar, provamos que o problema inverso para fontes características é equivalente ao problema inverso de salto. Esta equivalência foi usada na formulação do problema direto em termos do método das soluções fundamentais (MFS).

Além disso, considerando um subconjunto aberto, conexo e limitado do domínio, ω , como o suporte do termo fonte, estabelecemos um novo resultado de reconstrução do centroide deste conjunto, através de uma fórmula simples. Experimentos numéricos relacionados com a determinação do centroide para alguns suportes diferentes foram realizados, onde esta fórmula provou ser bastante eficiente.

A reconstrução da fronteira do suporte da fonte característica foi estudada através do MFS para o problema direto para gerar um dado de Neumann que foi usado no problema inverso. Este dado gerado foi usado nos experimentos numéricos usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt para minimização do funcional "erro cometido" entre dois funcionais de reciprocidade. Estes funcionais estavam relacionados com o suporte da fonte original e com o suporte da fonte aproximado $\mathcal{R}[\chi_\omega](v)$ e $\mathcal{R}[\chi_{\tilde{\omega}}](v)$, respectivamente.

Por outro lado, através de uma condição de separação dos dados de Neumann, estabelecemos um novo resultado de estabilidade para o problema inverso de fonte característica, supondo a existência e a unicidade deste problema. Este resultado apresenta uma desigualdade envolvendo parametrizações das fronteiras dos suportes e o funcional de reciprocidade para cada fonte. Experimentos numéricos relacionados à estabilidade da fronteira reconstruída foram apresentados, onde podemos perceber

que através de dados de Neumann próximos do original (dados com erro de medição), conseguimos reconstruir um suporte próximo do suporte original.

8.2 Trabalhos Futuros

No capítulo 2 foi apresentado o método das soluções fundamentais (MFS), ao passo que na seção 5.1 foi apresentada uma aplicação deste método ao problema direto de fonte característica para a equação de Helmholtz. Como um trabalho futuro, pretendemos aplicar o MFS em outros tipos de modelos, como aqueles baseados em operadores do tipo divergente, para o estudo de reconstrução de fonte e parâmetros, como a condutividade.

No capítulo 6, foi apresentado um resultado sobre estabilidade condicional para problemas inversos de fonte para o operador de Helmholtz. Como trabalho futuro, pretendemos nos aprofundar neste assunto para publicar este resultado em uma revista de circulação internacional, tendo em vista de que se trata de um resultado novo, seguindo uma linha de pesquisa paralela ao trabalho de Blasten, Imanuvilov e Yamamoto, [23].

No capítulo 7, apresentamos um operador diferencial de segunda ordem elíptico, com coeficientes constantes e mostramos que este pode ser reduzido ao operador de difusão-advecção. Através de uma nova mudança de variável, mostramos um resultado de reconstrução do centroide para esta equação análogo à equação de Helmholtz. Como um trabalho futuro, pretendemos fazer experimentos numéricos sobre reconstrução do centroide (através da fórmula análoga proposta) e reconstrução da fronteira (usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt), considerando variação dos parâmetros da equação de difusão-advecção.

Por fim, dada a ligação existente entre a teoria de problemas inversos de fonte e a teoria de controle em equações diferenciais parciais, pretendemos estudar técnicas que sejam de interseção entre estes dois campos de conhecimento. Como exemplo de técnicas utilizadas em ambas as teorias podemos citar: Estimativas de Carleman, ver [49]; Método de Controle, ver [36]; Teoria de Semigrupos, ver [37], [38], [39], [40].

Referências Bibliográficas

- [1] CALDERÓN, A. P. “On an inverse boundary value problem”, In: *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics*, pp. 65–73, Rio de Janeiro, Brazil, 1980, Sociedade Brasileira de Matemática.
- [2] FRIEDMAN, A., VOGELIUS, M. “Determining Cracks by Boundary Measurements”, *Indiana Univ. Math. J.*, v. 38, pp. 497–525, 1989.
- [3] COLTON, D., KRESS, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. New York, Applied Mathematical Science, vol. 93, Springer-Verlag, 1998.
- [4] ISAKOV, V. *Inverse Source Problems*. Providence, Rhode Island, Mathematical Surveys and Monographs, number 34, 1990.
- [5] ALVES, C. J. S., MARTINS, N. F., ROBERTY, N. C. “Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements”, *Inverse Problems and Imaging*, v. 17, n. 2, pp. 275–294, 2009.
- [6] EL BADIA, A., HA DUONG, T. “Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements”, *Inverse Problems*, v. 14, pp. 883–891, 1998.
- [7] HADAMARD, J. “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”, *Princeton University Bulletin*, v. 13, pp. 49–52, 1902.
- [8] EL BADIA, A., HA DUONG, T. “An inverse source problem in potential analysis”, *Inverse Problems*, v. 16, pp. 651–663, 2000.
- [9] EL BADIA, A., NARA, T. “An inverse source problem for Helmholtz equation from the Cauchy data with a single wave number”, *Inverse Problems*, v. 27, 105001, 2011.
- [10] HANSEN, P. C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. Siam Monographs on Mathematical Modelling and Computation, 1998.

- [11] KRESS, R. *Linear Integral Equations*. New York, Applied Mathematical Science, vol. 82, Springer, 1999.
- [12] H. W. ENGL, M. H., NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [13] EL BADIA, A., HA DUONG, T., HAMDI, A. “Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem”, *Inverse Problems*, v. 21, pp. 1–17, 2005.
- [14] ROBERTY, N. C., ALVES, C. J. S. “On the identification of star shape sources from boundary using a reciprocity functional”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 17, n. 2009, pp. 187–202, 2009.
- [15] SOUSA, D. M. S., ROBERTY, N. C. “An inverse source problem for the stationary diffusion-advection-decay equation”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 2011, pp. 891–915, 2012, doi:10.1080/17415977.2011.609466.
- [16] NOVIKOV, P. S. “Sur le problème inverse du potentiel”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 18, pp. 165–168, 1938.
- [17] HETTLICH, F., RUNDELL, W. “Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem”, *Inverse Problems*, v. 12, pp. 251–266, 1996.
- [18] HETTLICH, F., RUNDELL, W. “Recovery of the support of a source term in an elliptic differential equation”, *Inverse Problems*, v. 13, pp. 959–976, 1997.
- [19] RING, W. “Identification of a Core from Boundary Data”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 55, pp. 677–706, 1995.
- [20] ALVES, C. J. S., COLAÇO, M. J. , LEITÃO, V. M. A., MARTINS, N. F. M., ORLANDE, H. R.B., ROBERTY, N. C. “Recovering the source term in a linear diffusion problem by the method of fundamental solutions”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, n. 2008, pp. 1005–1021, 2008.
- [21] ACOSTA, S., CHOW, S., TAYLOR, J., VILLAMIZAR, V. “On the multi-frequency inverse source problem in heterogeneous media”, *Inverse Problems*, v. 28, 075013, 2012.
- [22] YAMAMOTO, M. “Conditional Stability in Determination of Force Terms of Heat Equations in a Rectangle”, *Mathematical and Computer Modelling*, v. 18, n. 1, pp. 79–88, 1993.

- [23] BLASTEN, E., IMANUVILOV, O. Y., YAMAMOTO, M. “Stability and Uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem for less regular potentials”, *Inverse Problems and Imaging*, v. 9, n. 3, pp. 709–723, 2015, doi:10.3934/ipi.2015.9.709.
- [24] ALVES, C. J. S., MAMUD, R., MARTINS, N. F., ROBERTY, N. C. “Reconstruction of Characteristic Sources in Helmholtz equations using the Method of Fundamental Solutions”, Submetido para *Inverse Problems in Science and Engineering*, pp. 29, 2016.
- [25] ISAKOV, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. New York, Applied Mathematical Sciences, Vol. 127, Springer, 2006.
- [26] EL BADIA, A., HA DUONG, T. “On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, v. 10, n. 6, pp. 585–599, 2002.
- [27] ANDRLE, M., EL BADIA, A. “On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem, II”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 23, n. 3, pp. 389–412, 2015.
- [28] FAIRWEATHER, G., KARAGEORGHIS, A. “The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems”, *Advances in Computational Mathematics*, v. 9, pp. 69–95, 1998.
- [29] ALEKSIDE, M. A. “On approximate solutions of a certain mixed boundary value problem in the theory of harmonic functions”, *Differential Equations*, v. 2, pp. 515–518, 1966.
- [30] KUPRADZE, V. D. “A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 4, pp. 199–205, 1964.
- [31] KUPRADZE, V. D., ALEKSIDE, M. A. “The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 4, n. 4, pp. 82–126, 1964.
- [32] GOLBERG, M. A., CHEN, C. S. “The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations”, *Boundary Elements Comm.*, v. 5, pp. 57–61, 1994.

- [33] GOLBERG, M. A. “Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method”, *Appl. Math. Comput.*, v. 75, pp. 91–101, 1996.
- [34] CHENG, J., HON, Y. C., YAMAMOTO, M. “Conditional stability estimation for an inverse boundary problem with non-smooth boundary in \mathcal{R}^3 ”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 353, n. 10, pp. 4123–4138, 2001.
- [35] ISAKOV, V. “Stability estimates for obstacles in inverse scattering”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 42, pp. 79–88, 1992.
- [36] YAMAMOTO, M. “Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method”, *Inverse Problems*, v. 11, pp. 481–496, 1995.
- [37] OZBILGE, E., DEMIR, A. “Analysis of a semigroup approach in the inverse problem of identifying an unknown parameters”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, pp. 965–969, 2011.
- [38] PRILEPKO, A. I. “The Semigroup Method for Inverse, Nonlocal, and Nonclassical Problems. Prediction-Control and Prediction-Observation for Evolution Equations: I”, *Differential Equations*, v. 41, pp. 1635–1646, 2005.
- [39] HASANOV, A., OTELBAEV, M., AKPAYEV, B. “Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 19, pp. 985–1006, 2011.
- [40] HASANOV, A., SLODIČKA, M. “An analysis of inverse source problems with final time measured output data for the heat conduction equation: A semigroup approach”, *Applied Mathematics Letters*, v. 26, pp. 207–214, 2013.
- [41] MARIN, L., LESNIC, D. “The Method of Fundamental Solutions for Inverse Boundary Value Problems Associated with the Two-Dimensional Biharmonic Equation”, *Mathematical and Computer Modelling*, v. 42, pp. 261–278, 2005.
- [42] KARAGEORGHIS, A., LESNIC, D., MARIN, L. “The method of fundamental solutions for solving direct and inverse Signorini problems”, *Computers & Structures*, v. 151, pp. 11–19, 2015.

- [43] KARAGEORGHIS, A., LESNIC, D., MARIN, L. “A survey of applications of the MFS to inverse problems”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 19, n. 3, pp. 309–336, 2011.
- [44] COLACO, M. J., ALVES, C. J. S., ORLANDE, H. R. B. “Transient non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 23, n. 4, 2015, doi:10.1080/17415977.2014.933830.
- [45] COLACO, M. J., ALVES, C. J. S., ORLANDE, H. R. B. “A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 60, pp. 653–663, 2013.
- [46] CHEN, C. S., KARAGEORGHIS, A., LI, YAN “On choosing the location of the sources in the MFS”, *Numerical Algorithms*, pp. 1–24, 2015.
- [47] ADAMS, R. A., FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Oxford, UK, 2003. p. 320.
- [48] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, Berkeley: University of California, 2010. p. 749.
- [49] YAMAMOTO, M. “Carleman estimates for parabolic equations and applications”, *Inverse Problems*, v. 25, Topical Review, 75 pp. , 2009, doi:10.1088/0266-5611/25/12/123013.
- [50] SAKAI, M. “A moment problem on Jordan domains”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 70, n. 1, pp. 35–38, 1978.
- [51] ROBERTY, N. C., RAINHA, M. L. S. “Moving Heat Source Reconstruction from the Cauchy Boundary Data”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2010, n. 2010, pp. Article ID 987545, 2010.
- [52] RAINHA, M. L. S., ROBERTY, N. C. “Integral and variational formulations for the Helmholtz equation inverse source problem”, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 808913, 2012.
- [53] KELLEY, C. T. *Iterative Methods for Optimization*. Philadelphia, SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [54] SAUTER, S. A., SCHWAB, C. *Boundary Element Methods*. Berlin, Springer Series in Computational Mathematics, 39, 12011.

- [55] MULLER, C. *Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces*. New York, Springer-Verlag New York, Inc, 1998.
- [56] ALVES, C. J. S., MARTINS, N. F. M., COLAÇO, M. J., RAINHA, M. L. S., ROBERTY, N. C. “Uncertainties on the inverse source problem for elliptic boundary values problems”. In: *ECCOMAS 2012*, Vienna, Austria, 2012.
- [57] LEVENBERG, K. “A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares”, *Quarterly of Applied Mathematics* , v. 2, pp. 164–168, 1944.
- [58] MARQUARDT, D. “An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, pp. 431–441, 1963, doi:10.1137/0111030.
- [59] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis, 2nd edition*. Wesley Publishing Company, 1981.
- [60] ALVES, C. J., CHEN, C. S. “A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems”, *Advances in Computational Mathematics*, v. 15, n. 2005, pp. 125–142, 2005.
- [61] ALVES, C. J., MARTINS, N. F., ROBERTY, N. C. “Identification and reconstruction of elastic body forces”, *Inverse Problems*, v. 30, n. 5, pp. doi:10.1088/0266–5611/30/5/055015, 2014.
- [62] MARTINS, N. F. “Detecting the localization of elastic inclusions and Lamé coefficients”, *Inverse Problems and Imaging*, v. 8, n. 3, pp. 779–794, 2014.
- [63] ALVES, C. J. S., CHEN, C. S. “The method of fundamental solutions adapted for a non homogeneous equation”. In: *Proceedings of the International Conference in Engineering and Science*, Tech Science Press, Los Angeles, 2001.
- [64] MCLEAN, W. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
- [65] LEBEDEV, N. N. *Special functions and their applications, 1st edition*. New Jersey, Selected Russian publications in mathematical sciences, Prentice Hall, 1965.
- [66] ATKINSON, K., HAN, W. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. New York, Lecture Notes in Mathematics, 2044, Springer, 2012.