



SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES  
SUBCRÍTICOS PELO MÉTODO DE ADOMIAN

Fernando Augusto Assunção Neto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientadores: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2012

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES  
SUBCRÍTICOS PELO MÉTODO DE ADOMIAN

Fernando Augusto Assunção Neto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

---

Prof. Aquilino Senra Martinez D.Sc.

---

Prof. Fernando Carvalho da Silva D.Sc.

---

Prof. Antonio Carlos de Abreu Mól D.Sc.

---

Prof. Hermes Alves Filho D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

FEVEREIRO DE 2012

Assunção Neto, Fernando Augusto

Soluções das Equações da Cinética Pontual para Reatores Subcríticos Pelo Método de Adomian/ Fernando Augusto Assunção Neto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XII, 55 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2012.

Referências Bibliográficas: pg. 52.

1. Método de Adomian. 2. Cinética Pontual. 3. Soluções da Equação. I. Martinez, Aquilino Senra et al II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

*“O trabalho dignifica o homem e a corrupção o destrói”  
Autor desconhecido*

*Dedico esse trabalho a minha mãe*

## **Agradecimentos**

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me conduzir pelos caminhos da ciência.

A minha mãe e meu avô por tudo que me proporcionaram incluindo seus sábios ensinamentos, sem eles não estaria aqui.

A meus irmãos Daniel e Bruna pelo apoio, torcida e todos os maravilhosos anos de convivência.

A minha namorada Ana Selma que esteve todo tempo ao meu lado com apoio e muito carinho sempre.

Ao meu sábio orientador, o professor Aquilino, que acreditou na minha idéia e em mim e me concedeu essa chance. Dedicou-se incondicionalmente ao meu trabalho e me transmitiu ensinamentos não só referentes à física mais também de como moralidade e dedicação podem formar um grande pesquisador e um adorado mestre.

Ao professor Fernando Carvalho, pelas incontáveis horas que trabalhamos juntos, tanto para me passar seus ensinamentos, importantes e valiosas dicas.

Ao professor Alvim que além de boas dicas e ensinamentos sempre se mostrou uma amizade sincera.

Ao professor Su Jian, chefe do departamento, que além de um grande professor e um brilhante administrador também nos trouxe ensinamentos valiosos.

A professora Verginia pelas maravilhosas aulas e a amizade que criamos.

Ao professor Paulo Fernando, Eduardo e Ademir pelo apoio concedido sempre ofertado independente de ser ou não seus orientandos.

Aos demais professores do Programa de Engenharia Nuclear da Coppe.

Aos professores Hermes e Mól por aceitarem a tarefa de julgar o meu trabalho, disponibilizando parte de seu importante tempo para esta tarefa.

Aos meus antigos professores na Universidade Federal de Sergipe em especial, André Mauricio, Ana Maia, Susana Lalic, Divanízia entre outros.

Aos nossos maravilhosos secretários Tânia, Josevalda, Liliane, Reginaldo e Washington que nunca me deixarem perder prazos e sempre nos dedicam verdadeira amizade.

A todos os funcionários da biblioteca central do centro de tecnologia, que fazem seu trabalho de maneira muito séria sempre nos tratando bem e dando uma ajuda que não tem preço.

A todos os funcionários que cuidam da limpeza e manutenção das instalações, que mesmo desconhecidos, seu trabalho é fundamental para o bom funcionamento da instituição.

Os meus mais antigos amigos como Dalton e Marco Saulo colegas da Universidade Federal de Sergipe, Rafael e Marcelo Batata, Eliankir, Jodeclan, Dide e meus novos amigos como Robério, Wemerson, Mauricio Penetra, Leonardo, Daniele Maiolino, Claudia Siqueira, Alessandra a Thaís Maria entre outros.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Ciências (M. Sc.).

## SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA PONTUAL PARA REATORES SUBCRÍTICOS PELO MÉTODO DE ADOMIAN

Fernando Augusto Assunção Neto

Fevereiro / 2012

Orientadores: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Programa: Engenharia Nuclear

Durante a operação de um reator é fundamental conhecermos os parâmetros do núcleo do reator principalmente a variação temporal da distribuição da potência nuclear. Um método largamente utilizado é a aplicação das equações da cinética pontual, pois fornecem resultados satisfatórios em pequenos intervalos de tempo. As equações da cinética pontual podem ter solução analítica para alguns casos de reatividade, mas em geral só podem ser resolvidas numericamente. Nesta dissertação usamos o método de Adomian para a solução da equação da cinética pontual de reatores subcríticos. O método de Adomian representa uma importante ferramenta para solução destas equações com reatividade constante por apresentar um esquema simples para solução sem necessidade de linearização, computação massiva ou transformação do problema.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SOLUTIONS OF THE KINETIC POINT EQUATIONS FOR THE SUBCRITICAL  
REACTORS BY ADOMIAN METHOD

Fernando Augusto Assunção Neto

February / 2012

Advisors: Aquilino Senra Martinez

Fernando Carvalho da Silva

Department: Nuclear Engineering

During operation of a nuclear reactor is very important to know the parameters of reactor core especially the time variation of the nuclear power. A widely used method is the application of point kinetics equations, because provide satisfactory results in small time intervals. The point kinetics equations can have exact solutions for some cases of reactivity, but in general can only be solved numerically. This dissertation we use the Adomian method for the solutions of the point kinetics equations for subcritical reactors. The Adomian method is a important tool for solving these equations with constant reactivity by present a simple scheme for the solutions without the need linearization of the problem, massive computation or transformation of the problem.

# Sumário

<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>xii</b>
<b>Capítulo 1- Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2- As equações da cinética convencional.....</b>	<b>4</b>
2.1-Introdução .....	4
2.2-Desenvolvimento das equações da cinética pontuais convencionais .....	4
<b>Capítulo 3- As equações da cinética pontual para reatores subcríticos .....</b>	<b>9</b>
3.1-Introdução .....	9
3.2-Desenvolvimento das equações da cinética pontual para reatores subcríticos a partir da função importância $\varepsilon_0^+$ .....	9
3.3-Comportamento assintótico .....	16
<b>Capítulo 4-Aplicação do método de Adomian para solução das equações da cinética pontual.....</b>	<b>17</b>
4.1-Introdução .....	17
4.2-Método da decomposição de Adomian .....	17
4.3- Solução analítica das equações da cinética pontual para reatores críticos sem fonte, com um grupo de precursores e reatividade constante pelo método de Adomian.....	20
4.4- Solução analítica das equações da cinética pontual para reatores subcríticos com fonte fixa, um grupo de precursores e reatividade constante pelo método de Adomian .....	26
4.5-Solução numérica das equações da cinética pontual.....	35
<b>Capítulo 5- Resultados e discussões .....</b>	<b>39</b>
5.1-Introdução .....	39
5.2- Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores críticos sem fonte externa .....	36

5.3- Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores críticos com fonte externa .....	44
5.4- Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores subcríticos com fonte externa .....	46
5.5- Discussão.....	49
<b>Capítulo 6-Conclusões.....</b>	<b>51</b>
<b>Capítulo 7- Referências Bibliográficas .....</b>	<b>52</b>
<b>Capítulo 8-Apêndice A- Dados utilizados.....</b>	<b>53</b>
8.1-Introdução .....	53
8.2-Valores de dados para reatores críticos .....	53
8.3-Valores de dados para reatores subcríticos .....	54

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1- Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e reatividade linear.....	40
Tabela 5.2- Tempo gasto para realização dos cálculos .....	40
Tabela 5.3- Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e com reatividade linear.....	41
Tabela 5.4- Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e reatividade senoidal.....	42
Tabela 5.5- Tempo gasto para realização dos cálculos .....	42
Tabela 5.6- Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e com reatividade senoidal.....	43
Tabela 5.7- Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores reatividade constante .....	44
Tabela 5.8- Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores.....	45
Tabela 5.9- Tempo gasto para realização de cálculos .....	45
Tabela 5.10- Variação da potência nuclear no tempo para reatores subcríticos com um grupo de precursores e reatividade constante .....	46
Tabela 5.11- Variação da concentração de precursores no tempo para reatores subcríticos com um grupo de precursores e reatividade constante.....	47
Tabela 5.12- Tempo gasto para realização de cálculos .....	48
Tabela 5.13- Variação da potência nuclear no tempo para reatores subcríticos com seis grupos de precursores e reatividade constante .....	48
Tabela 5.14- Tempo gasto para realização de cálculos .....	49
Tabela 8.1- Valores utilizados para reatores críticos com um grupo de precursores .....	53
Tabela 8.2- Valores utilizados para reatores subcríticos com um grupo de precursores.....	54
Tabela 8.3- Dados para cada grupo de precursor para reatores subcríticos .....	55

# CAPITULO I

## Introdução

A primeira década do século XXI marcou o mundo como sendo o limite aceitável da natureza, pois o estado de degradação causado pelo aquecimento global é visível seja pelo desaparecimento de geleiras antes ditas eternas, ou pelas bruscas variações de clima que se tornam mais frequentes pelo mundo, fora esse fato as grandes oscilações no preço do petróleo levou aos líderes mundiais a repensarem suas posições políticas com relação à matriz energética de seus respectivos países. Muito se fala sobre o uso das chamadas energias intermitentes, ou seja, que funcionam apenas por períodos como eólica e solar, mas elas nunca se mostraram uma solução viável para o crescimento da demanda energética mundial que deve vir a ser cerca de trinta e cinco por cento (35%) maior do que em 2005 (Veiga et al, 2011).

Em média durante a vida de um indivíduo norte americano, seu consumo em energia elétrica gera uma quantidade de resíduo que convertido em resíduo de origem nuclear não passará de alguns gramas, todavia se esse mesmo consumo fosse convertido em resíduo de origem de usinas de carvão seriam geradas quase cento e cinquenta (150) toneladas de resíduo entre sólidos e gasosos e esse material que sobra da queima do carvão além de serem ricos em gases causadores do efeito estufa ainda são fontes de radioatividade e de inúmeros metais pesados como chumbo, arsênico e mercúrio (Veiga et al, 2011). No panorama descrito pela Organização Mundial de Saúde (OMS), por ano, a poluição do carvão causa em média cerca de meio milhão de mortes só em países emergentes.

Dentro do cenário descrito acima a energia de origem nuclear ressurgiu como uma opção limpa e confiável para resolver as demandas energéticas mundiais com mínimos impactos à saúde humana e ao meio ambiente, pois as emissões de CO<sub>2</sub> de uma usina nuclear estão duas ordens de grandeza abaixo das emissões das usinas de energia de combustível fóssil, sendo as que menos contribuem para o aumento global da temperatura do planeta.

Um dos grandes problemas enfrentados pelas usinas nucleares é o armazenamento dos resíduos provenientes da reação de fissão controlada, pois alguns

desses chegam há levar muitos séculos para reduzirem sua radiotoxicidade a níveis em que possam ser retirados das contenções, o que implica num enorme gasto. Outro obstáculo à ampliação do uso da energia de origem nuclear está no fato do aumento da opinião pública negativa após os incidentes recentes ocorridos no complexo nuclear de Fukushima no Japão.

Uma nova geração de reatores nucleares avançados que estão sendo desenvolvidos prometem ajudar a minimizar de maneira considerável esses problemas. Dentre os projetos em desenvolvimento um dos que ganha maior destaque é o do reator nuclear conhecido como “Accelerator-Driven-System” (ADS) projeto esse que foi concebido pelo pesquisador italiano e prêmio Nobel em física de 1984, Carlo Rubbia, projeto esse que combina a idéia de um acelerador de partículas com um núcleo subcrítico.

Pode-se resumir a idéia de funcionamento desse reator nuclear como a injeção de prótons pelo acelerador de partículas sobre um alvo que pode ser sólido ou líquido gerando em média cerca de dez (10) a vinte (20) nêutrons para cada próton, produzindo assim uma fonte de nêutrons para impulsionar o núcleo subcrítico. Uma consequência importante em relação a seu núcleo subcrítico está no fato de que a reação não é auto-sustentável tornando os intrinsecamente mais seguros, assim acidentes de criticalidade como o ocorrido no reator número quatro (4) da usina nuclear de Chernobyl são impossíveis de ocorrer. Outra característica que se pode destacar no projeto dos reatores ADS está na possibilidade dele poder reduzir de maneira considerável o tempo de vida dos rejeitos nucleares através de alguns processos como, por exemplo, a transmutação.

Durante a operação de um reator nuclear seja ele crítico ou subcrítico é fundamental conhecermos os parâmetros do núcleo do reator, principalmente a variação da potência nuclear. Um dos cálculos mais importantes da Física de Reatores é a determinação da relação funcional entre a reatividade inserida e a potência gerada. Conhecida a forma da reatividade, é possível, determinar a variação temporal da potência do reator. Um método largamente utilizado para tal finalidade é a solução das equações da cinética pontual, as quais fornecem soluções bastante satisfatórias em curtos intervalos de tempo. No caso particular de inserção de reatividade constante as equações cinética pontual possuem uma solução analítica exata.

Apesar da cinética pontual fornecer solução analítica exata para o caso em que a reatividade é constante, isso não vem a ocorrer em outros casos como, por exemplo, o caso em que a reatividade inserida varia linearmente com o tempo, sendo necessárias algumas aproximações para obter soluções analíticas aproximadas o que pode levar a perda de informações ou mesmo da realidade física do problema.

O método da decomposição de Adomian, por tratar da solução de equações não lineares como as equações da cinética pontual, pode representar uma importante ferramenta para solução destas equações uma vez que fornece um esquema direto para resolver o problema sem a necessidade de linearização, computação massiva ou qualquer transformação do problema, mais adiante falaremos um pouco mais do método da decomposição de Adomian.

Serão apresentadas nesta dissertação soluções para as equações da cinética pontual para reatores subcríticos e críticos com fonte e sem fonte, com objetivo de mostrar a validade e a eficiência do método de Adomian na solução deste tipo de problema. Para os casos analisados a validação dos resultados foi feita em comparação ao método das diferenças finitas (Alvim et al, 2007).

O desenvolvimento das equações da cinética pontual para reatores Subcríticos foi utilizado o método proposto por (Silva et al, 2011) serão apresentadas nos próximos capítulos.

# CAPÍTULO II

## As Equações da Cinética Pontual Convencionais

### 2.1-Introdução

Este capítulo discutirá as equações da cinética pontual convencionais, baseados nos trabalhos de (Silva et al, 2011). O método utilizado para obter as equações convencionais dispensa maiores detalhes por ser um tema largamente discutido na literatura, porém é necessária sua abordagem, tendo em vista que vamos comparar a eficácia da aplicação do método de Adomian tanto nelas como nas equações da cinética pontual para reatores subcríticos.

### 2.2- Desenvolvimento das Equações da Cinética Pontual Convencionais

Considere as equações da cinética espacial de reatores com propriedades físicas independentes do tempo, nêutrons monoenergéticos num meio homogêneo, escritas da seguinte forma:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -A\Psi(\vec{r}, t) + (1 - \beta)F\Psi(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(\vec{r}, t) + q_{ext}(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial C_i(\vec{r}, t)}{\partial t} = \beta_i F\Psi(\vec{r}, t) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t), \text{ com } i=1, \dots, I. \quad (2.2)$$

Onde,  $v$  é a velocidade dos nêutrons,  $\lambda_i$  é a constante decaimento dos precursores de nêutrons do grupo  $i$ ,  $\beta_i$  é a fração do  $i$ -ésimo grupo de nêutrons retardados, sendo que:

$$\beta = \sum_{i=1}^I \beta_i, \quad (2.3)$$

A é o operador de remoção, que contabiliza a fuga e a absorção de nêutrons e é dado por:

$$A = \{-\vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}) + \Sigma_a\}, \quad (2.4)$$

Onde  $D$  e  $\Sigma_a$ , são respectivamente o coeficiente de difusão e a secção de choque macroscópica de absorção;  $F$  é o operador produção definido por:

$$F = \nu \Sigma_f, \quad (2.5)$$

Onde  $\nu$  é o número médio de nêutrons gerado por fissão e  $\Sigma_f$  é a secção de choque macroscópica de fissão.

Ponderando a equação (2.1) com o fluxo de nêutrons adjuntos  $\phi_c^+$  que é solução da equação adjunta:

$$A^+ \phi_c^+(\vec{r}) - F^+ \phi_c^+(\vec{r}) = 0, \quad (2.6)$$

Obtêm-se a seguinte equação:

$$\langle \phi_c^+ | \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle = -\langle \phi_c^+ | A | \Psi \rangle + \langle \phi_c^+ | (1 - \beta) F | \Psi \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \phi_c^+ | C_i \rangle + \langle \phi_c^+ | q_{ext} \rangle, \quad (2.7)$$

Onde  $\langle \rangle$  representa a integração em todo espaço e para simplificar,  $\vec{r}$  e  $t$  foram omitidos.

No sentido de simplificar a equação (2.7) vamos representar o fluxo por sua aproximação adiabática:

$$\Psi(\vec{r}, t) \approx \alpha(t) \cdot \varphi(\vec{r}, t), \quad (2.8)$$

Onde  $\alpha(t)$  é a amplitude e pode ser identificada como sendo o número total de nêutrons oriundos da fissão, ou seja:

$$\alpha(t) = N(t), \quad (2.9)$$

Enquanto  $\varphi(\vec{r}, t)$  é uma função de forma a satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.10)$$

Ou seja,  $\varphi(\vec{r}, t)$  deve possuir uma fraca dependência ou independência do tempo, e quando é realizada uma análise o sistema próximo da criticalidade é permitido aproximar  $\varphi(\vec{r}, t)$  por  $\phi_c(\vec{r})$ , desta forma podemos escrever a equação (2.8) como sendo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = N(t) \cdot \phi_c(\vec{r}), \quad (2.11)$$

Então substituindo a aproximação representado pela equação (2.11) na equação (2.7), vai se obter:

$$\begin{aligned} \langle \phi_c^+ | \frac{1}{v} \frac{d}{dt} | N(t) \cdot \phi_c \rangle &= -\langle \phi_c^+ | A | N(t) \cdot \phi_c \rangle + \langle \phi_c^+ | (1 - \beta) F | N(t) \cdot \phi_c \rangle + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \phi_c^+ | C_i \rangle + \langle \phi_c^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned}, \quad (2.12)$$

Lembrando que  $\langle \quad \rangle$  representa a integração em todo espaço, logo a função temporal  $N(t)$  pode ser removida da integral. Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle \phi_c^+ | v^{-1} | \phi_c \rangle \cdot \frac{dN(t)}{dt} &= -\langle \phi_c^+ | A | \phi_c \rangle \cdot N(t) + \langle \phi_c^+ | (1 - \beta) \cdot F | \phi_c \rangle N(t) + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \phi_c^+ | C_i \rangle + \langle \phi_c^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned}, \quad (2.13)$$

Agora, dividindo ambos os lados da equação (2.13) por um fator de normalização;

$$I \equiv \langle \phi_c^+ | F | \phi_c \rangle, \quad (2.14)$$

tem-se:

$$\frac{\langle \phi_C^+ | v^{-1} | \phi_C \rangle}{I} \cdot \frac{dN(t)}{dt} = -\frac{\langle \phi_C^+ | A | \phi_C \rangle}{I} \cdot N(t) + \frac{\langle \phi_C^+ | (1-\beta) \cdot F | \phi_C \rangle}{I} N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\langle \phi_C^+ | C_i \rangle}{I} + \frac{\langle \phi_C^+ | q_{ext} \rangle}{I}, \quad (2.15)$$

Para simplificação da notação serão utilizadas as seguintes definições:

$$\Lambda_{ef} \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | v^{-1} | \phi_C \rangle}{I}, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{k_{ef}} \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | A | \phi_C \rangle}{I}, \quad (2.17)$$

$$(1 - \beta_{ef}^e) \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | (1-\beta) \cdot F | \phi_C \rangle}{I}, \quad (2.18)$$

$$C_i^C(t) \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | C_i \rangle}{I}, \quad (2.19)$$

$$Q^C(t) \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | q_{ext} \rangle}{I}, \quad (2.20)$$

Assim, substituindo as definições representadas pelas equações de (2.16) até a equação (2.20) na equação (2.15), tem-se que:

$$\Lambda_{ef}^C \frac{dN(t)}{dt} = -\frac{1}{k_{ef}} N(t) + (1 - \beta_{ef}^C) N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^C(t) + Q^C(t), \quad (2.21)$$

É possível rearranjar a equação (2.21), resultando:

$$\Lambda_{ef}^C \frac{dN(t)}{dt} = \left[ \left(1 - \frac{1}{k_{ef}}\right) - \beta_{ef}^C \right] N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^C(t) + Q^C(t), \quad (2.22)$$

Finalmente, podemos definir:

$$\rho(t) \equiv 1 - \frac{1}{k_{ef}}, \quad (2.23)$$

Substituindo a definição representada pela equação (2.23) na equação (2.22), tem-se que:

$$\Lambda_{ef}^C \frac{dN(t)}{dt} = (\rho(t) - \beta_{ef}^C)N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^C(t) + Q^C(t), \quad (2.24)$$

Procedendo de maneira análoga para concentração de precursores, o comportamento dinâmico da equação (2.2), pesando-a com o fluxo adjunto  $\phi_C^+$  e considerando a aproximação adiabática do fluxo de nêutrons representada pela equação (2.11), tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \langle \phi_C^+ | C_i \rangle = \langle \phi_C^+ | \beta_i \cdot F | N(t) \cdot \phi_C \rangle - \lambda_i \langle \phi_C^+ | C_i \rangle, \quad (2.25)$$

Dividindo a equação (2.25) pelo fator de normalização representado pela equação (2.14), tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\langle \phi_C^+ | C_i \rangle}{I} = \frac{\langle \phi_C^+ | \beta_i \cdot F | \phi_C \rangle N(t)}{I} - \lambda_i \frac{\langle \phi_C^+ | C_i \rangle}{I}, \quad (2.26)$$

Considerando a seguinte definição:

$$\beta_{i,eff}^C \equiv \frac{\langle \phi_C^+ | \beta_i F | \phi_C \rangle}{I}, \quad (2.27)$$

Utilizando a aproximação representada pela equação (2.19), temos que:

$$\frac{dC_i^C(t)}{dt} = \beta_{i,eff}^C N(t) - \lambda_i C_i^C(t), \text{ com } i=1, \dots, I \quad (2.28)$$

As equações (2.24) e (2.28) são as chamadas equações da cinética pontual convencionais.

No próximo capítulo utilizaremos uma metodologia similar, para obter um sistema de equações da cinética pontual para os reatores subcríticos.

# CAPÍTULO III

## As Equações da Cinética Pontual para reatores Subcríticos

### 3.1- Introdução

Este capítulo tem como objetivo mostrar o método de obtenção das equações da cinética pontual para reatores subcríticos de acordo com (Silva et al., 2011), equações essas que serão um dos principais objetos de estudo com a aplicação do método da decomposição de Adomian.

Para a investigação do comportamento dinâmico de um núcleo de reator subcrítico foi feito uso da função importância  $\varepsilon_0^+$  (Silva et al., 2011) para obter um novo sistema de equações da cinética pontual que apresente uma boa precisão dentro da faixa de subcriticalidade de interesse, tendo em vista que para esta faixa de valores a função importância  $\varepsilon_0^+(\vec{r})$  se aproxima do fluxo adjunto, podendo assim substituí-lo pela função importância  $\varepsilon_0^+(\vec{r})$ .

### 3.2-Desenvolvimentos das Equações da Cinética Pontual para Reatores Subcríticos a partir da função importância $\varepsilon_0^+$

Partindo da equação (2.1) multiplicando-a por  $\varepsilon_0^+(\vec{r})$  e integrando no volume tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle = & - \langle \varepsilon_0^+ | A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1 - \beta) F | \Psi \rangle + \\ & \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

Baseado na teoria da perturbação generalizada heurística ou HGPT (Heuristically Generalized Perturbation Theory) proposta por (A. GANDINI, 1987), a referência [4] propôs as seguintes perturbações ao sistema:

$$- A \rightarrow -A_0 + \delta A, \quad (3.2)$$

$$F \rightarrow \frac{1}{k_{sub}} F_0 + \delta F, \quad (3.3)$$

Onde  $A_0$ ,  $F_0$  correspondem aos estados estacionários não perturbados e  $k_{sub}$  é um fator de subcriticalidade.

Substituindo as perturbações representadas pelas equações (3.2) e (3.3) na equação (3.1) e realizando algumas manipulações, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | -A_0 + \delta A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) \left( \frac{1}{k_{sub}} F_0 + \delta F \right) | \Psi \rangle + \\ &\sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned}, \quad (3.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | -A_0 | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \delta A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) \frac{1}{k_{sub}} F_0 | \Psi \rangle + \\ \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) (\delta F) | \Psi \rangle &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned}, \quad (3.5)$$

Somando e subtraindo o lado direito da equação por:

$$\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle, \quad (3.6)$$

tem que:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | -A_0 | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \delta A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) \frac{1}{k_{sub}} F_0 | \Psi \rangle + \\ \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) (\delta F) | \Psi \rangle &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle + \\ \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle &- \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle \end{aligned}, \quad (3.7)$$

O que vai implicar em:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | -A_0 | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \delta A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) \frac{1}{k_{sub}} F_0 | \Psi \rangle + \\
\langle \varepsilon_0^+ | (1-\beta) (\delta F) | \Psi \rangle &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle + \\
\langle \varepsilon_0^+ | \beta (F_0 + \delta F) | \Psi \rangle &- \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Após algumas manipulações algébricas em (3.8), encontra-se:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | \delta A | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | (\delta F) | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle - \\
\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle &+ \langle \varepsilon_0^+ | -A_0 | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{k_{sub}} F_0 | \Psi \rangle
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Partindo do problema adjunto de fonte, após análise detalhada do formalismo, a realização de soluções numéricas para melhor representação do termo  $\eta \frac{\nu}{N_0} \Sigma_f$  e a introdução do termo  $k_{sub}$  para contornar o problema do aparecimento de um termo que independe da representação funcional de  $\eta$ , a referência [4] obteve a seguinte equação:

$$A_0^+ \varepsilon_0^+(\vec{r}) - \frac{1}{k_{sub}} F_0^+ \varepsilon_0^+(\vec{r}) - \eta \frac{\nu}{N_0} \Sigma_f = 0, \tag{3.10}$$

Onde  $N_0$  é o numero de nêutrons liberados por fissão em um dado estado não perturbado,  $\eta$  é um fator que diminui com a proximidade do estabelecimento da criticalidade.

$$\eta = 1 - k_{ef}, \tag{3.11}$$

Assim podemos pensar a equação (3.10) coma função  $\Psi$ , de maneira que:

$$\langle \Psi | A_0^+ | \varepsilon_0^+ \rangle - \langle \Psi | \frac{1}{k_{sub}} F_0^+ | \varepsilon_0^+ \rangle - \eta \frac{\nu}{N_0} \langle \Psi | \Sigma_f \rangle = 0, \tag{3.12}$$

Sabendo que:

$$\langle \Psi | A_0^+ | \varepsilon_0^+ \rangle = -\langle \varepsilon_0^+ | A_0^+ | \Psi \rangle = \langle \varepsilon_0^+ | -A_0^+ | \Psi \rangle, \tag{3.13}$$

$$\langle \Psi | F_0^+ | \varepsilon_0^+ \rangle = -\langle \varepsilon_0^+ | F_0^+ | \Psi \rangle, \quad (3.14)$$

$$\langle \Psi | \Sigma_f \rangle = -\langle \Sigma_f | \Psi \rangle, \quad (3.15)$$

Substituindo os termos representados pelas equações de (3.13), (3.14) e (3.15) na equação (3.12) tem-se que:

$$\langle \varepsilon_0^+ | -A_0^+ | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{k_{sub}} F_0^+ | \Psi \rangle = -\eta \frac{v}{N_0} \langle \Sigma_f | \Psi \rangle, \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na equação (3.09), tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | (\delta A + \delta F) | \Psi \rangle - \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \Psi \rangle + \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle - \\ &\eta \frac{v}{N_0} \langle \Sigma_f | \Psi \rangle + \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle \end{aligned}, \quad (3.17)$$

No capítulo II, também com base no trabalho proposto por (Silva et al, 2011), vimos que uma fatoração pode ser aplicada a  $\Psi$  como a que foi proposta na equação (2.11), de maneira que se obtém parâmetros integrais bem definidos o que proporciona uma melhor maneira de se lidar com as equações da cinética pontual.

Logo é possível fatorizar  $\Psi$  como sendo:

$$\Psi(\vec{r}, t) = N(t) \cdot \phi_0(\vec{r}), \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.17), tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_0^+ | \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} | N(t) \cdot \phi_0(\vec{r}) \rangle &= \langle \varepsilon_0^+ | (\delta A + \delta F) | N(t) \cdot \phi_0(\vec{r}) \rangle - \\ \langle \varepsilon_0^+ | \beta F | N(t) \cdot \phi_0(\vec{r}) \rangle &+ \sum_{i=1}^I \lambda_i \langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle - \eta \frac{v}{N_0} \langle \Sigma_f | N(t) \cdot \phi_0(\vec{r}) \rangle + \\ \langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle & \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como  $\langle \rangle$  é uma integral no espaço  $N(t)$  sai da integral, logo:

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{V} \cdot \phi_0(\vec{r}) \right. \right\rangle \frac{dN(t)}{dt} &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (\delta A + \delta F) \cdot \phi_0(\vec{r}) \right. \right\rangle N(t) - \\
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \phi_0(\vec{r}) \right. \right\rangle P(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| C_i \right. \right\rangle - \eta \frac{\nu}{N_0} \left\langle \Sigma_f \left| \phi_0(\vec{r}) \right. \right\rangle N(t) +, & \quad (3.20) \\
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle
\end{aligned}$$

Apenas a fim de facilitar a representação das equações vamos omitir  $\vec{r}$  e vamos identificar  $\langle \Sigma_f | \phi_0 \rangle$  como sendo a taxa de fissão, inicial, ou seja:

$$T_f(t=0) = \langle \Sigma_f | \phi_0 \rangle, \quad (3.21)$$

Tem-se que:

$$N_0 = \nu \langle \Sigma_f | \phi_0 \rangle, \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{\nu} \cdot \phi_0 \right. \right\rangle \frac{dN(t)}{dt} &= \left\langle \varepsilon_0^+ \left| (\delta A + \delta F) \cdot \phi_0 \right. \right\rangle N(t) - \left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \phi_0 \right. \right\rangle N(t) + \\
\sum_{i=1}^I \lambda_i \left\langle \varepsilon_0^+ \left| C_i \right. \right\rangle - \eta N(t) + \left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle & \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos da equação por um fator de normalização:

$$I = \langle \varepsilon_0^+ | F | \phi_0 \rangle, \quad (3.24)$$

Logo;

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \frac{1}{\nu} \cdot \phi_0 \right. \right\rangle}{I} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| (\delta A + \delta F) \cdot \phi_0 \right. \right\rangle}{I} N(t) - \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \beta F \phi_0 \right. \right\rangle}{I} N(t) + \\
\sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| C_i \right. \right\rangle}{I} + \frac{\eta}{I} N(t) + \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| q_{ext} \right. \right\rangle}{I} & \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Definindo:

$$\Lambda_{ef}^n \equiv \frac{\left\langle \varepsilon_0^+ \left| \nu^{-1} \phi_0 \right. \right\rangle}{I}, \quad (3.26)$$

$$\rho^n \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | (\delta A + \delta F) | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (3.27)$$

$$\beta_{ef}^n \equiv \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \beta F | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (3.28)$$

$$C_i^n(t) = \frac{\langle \varepsilon_0^+ | C_i \rangle}{I}, \quad (3.29)$$

$$Q^n = \frac{\langle \varepsilon_0^+ | q_{ext} \rangle}{I}, \quad (3.30)$$

e,

$$\Gamma = \frac{\eta}{I}, \quad (3.31)$$

Onde  $\rho^n$  é uma reatividade generalizada,  $Q^n$  é o valor da fonte externa relacionado com a equação (3.4),  $\Gamma N(t)$  um termo de subcriticalidade introduzido pela função importância  $\varepsilon_0^+$  e  $C_i^n(t)$  a concentração de precursores associado à função importância  $\varepsilon_0^+$ , assim substituindo as definições representadas pelas equações de (3.26) até a equação (3.31) na equação (3.25) tem-se:

$$\Lambda_{ef}^n \frac{dN(t)}{dt} = (\rho^n - \beta_{ef}^n) N(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \cdot C_i^n(t) - \Gamma N(t) + Q^n, \quad (3.32)$$

Partindo da equação (2.2) pesando-a com a função  $\varepsilon_0^+$ , considerando a fatoração representada pela equação (3.18) e dividindo pelo fator de normalização representado pela equação (3.24), tem-se:

$$\frac{\langle \varepsilon_0^+ | \frac{\partial}{\partial t} | C_i \rangle}{I} = \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \beta_i F | N(t) \cdot \phi_0 \rangle}{I} - \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \lambda_i | C_i \rangle}{I}, \quad (3.33)$$

Aplicando a seguinte definição na equação (3.33):

$$\beta_{i,ef}^n = \frac{\langle \varepsilon_0^+ | \beta_i F | \phi_0 \rangle}{I}, \quad (3.34)$$

Dai resulta:

$$\frac{dC_i^n(t)}{dt} = \beta_{i,ef}^n N(t) - \lambda_i C_i^n(t), \quad (3.35)$$

Devido à normalização feita durante o processo de desenvolvimento do sistema de equações da cinética pontual proposto pela referência [4], verificou-se o aparecimento do fator  $\Gamma$ . Este termo não depende diretamente da representação funcional de  $\eta$ , uma vez que o fator de normalização  $I$  também depende de  $\eta$ .

As equações (3.32) e (3.35) são as chamadas equações da cinética pontual para reatores subcríticos.

Ainda podemos definir:

$$P(t) \equiv \omega \cdot \Sigma_f \cdot N(t), \quad (3.36)$$

$$C_i(t) \equiv \frac{\omega \cdot \Sigma_f}{\Lambda_{ef}^n} C_i^n(t), \quad (3.37)$$

$$Q_{ext} = \frac{\omega \cdot \Sigma_f}{\Lambda_{ef}^n} Q^n, \quad (3.38)$$

Substituindo as definições representadas pelas equações (3.36), (3.37) e (3.38) nas equações (3.32) e (3.35), tem-se:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \cdot C_i(t) - \frac{\Gamma}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + Q_{ext}, \quad (3.39)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda_i C_i(t), \quad (3.40)$$

### 3.3- comportamento assintótico

A potência assintótica, seguindo a inserção de perturbação que vem a manter o sistema subcrítico, é obtido das equações (3.39) e (3.40) da seguinte forma:

Considerando constante a potência e a concentração de precursores assintóticas, ou seja, podemos escrever:

$$\frac{dP_{as}}{dt} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{dC_{as}}{dt} = 0, \quad (3.42)$$

É possível escrever:

$$C_{as} = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\lambda_i \Lambda_{ef}^n} P_{as} \quad (3.43)$$

e,

$$P_{as} = -\frac{Q_{ext} \Lambda_{ef}^n}{(\rho^n - \Gamma)} \quad (3.44)$$

## CAPITULO IV

### **Aplicação do método da decomposição de Adomian para solução da cinética pontual**

#### **4.1-Introdução**

O método da decomposição de Adomian, proposto pelo matemático George Adomian (Adomian, 1988), consiste numa técnica de resolução de problemas fracamente não-lineares, sem a necessidade de linearização, de aproximações e tampouco de técnicas da teoria de perturbação. Esse método fornece soluções semi-analíticas, em forma de expansões de séries que convergem rapidamente, utilizando poucas iterações para sistemas lineares, não-lineares, determinísticos e estocásticos (Cherruault, 1989). Existe na literatura um grande número de problemas nas áreas de física e engenharia resolvidos pelo método de Adomian, de maneira que foi feito uso dessa ferramenta para resolver o conjunto de equações descritas nos capítulos anteriores.

Neste capítulo vamos mostrar o desenvolvimento de como utilizamos o método da decomposição de Adomian para abordarmos problema da cinética pontual, ou seja, como resolver analiticamente as equações (2.24) e (2.28) que são as equações convencionais da cinética pontual primeiramente sem fonte externa e as equações (3.32) e (3.35) para reatores subcríticos com um único grupo de precursores e reatividade constante a fim de comparar a eficácia do método, por fim vai ser demonstrado o desenvolvimento de uma solução numérica com qualquer quantidade de precursores de nêutrons.

#### **4.2-Método da Decomposição de Adomian**

Esta seção é tem como base os trabalhos realizados por George Adomian (Adomian, 1994) e mostra a idéia geral do método de Adomian.

Seja uma equação diferencial não-linear da forma:

$$Fu(t) = g(t) \quad (4.1)$$

Decompondo o operador F podemos escrever a equação (4.1) da seguinte forma:

$$Lu(t) + Nu(t) + Ru(t) = g(t) \quad (4.2)$$

Sendo  $Lu(t)$  a parte linear inversível,  $Nu(t)$  a parte não linear e  $Ru(t)$  o resto.

A equação (4.2) pode ser assim reescrita:

$$Lu(t) = g(t) - Nu(t) - Ru(t) \quad (4.3)$$

Aplicando a inversa do operador L em ambos os termos da equação (4.3) resulta que:

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1}g(t) - L^{-1}Nu(t) - L^{-1}Ru(t) \quad (4.4)$$

Agora, definindo o operador L como sendo uma derivada simples ( $L = \frac{d}{dt}$ ), sua

inversa será o operador integral ( $L^{-1} = \int_{t_0}^t [\cdot] dt$ ). Então, sabendo que:

$$\int_a^x \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) - F(a) \quad (4.5)$$

temos, por comparação entre equações (4.4) e (4.5), que

$$L^{-1}Lu(t) = \int_{t_0}^t \frac{du(t)}{dt} dt = u(t) - u(t_0) \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.6) na equação (4.4), tem-se que:

$$u(t) = u(t_0) + L^{-1}g(t) - L^{-1}Nu(t) - L^{-1}Ru(t) \quad (4.7)$$

Podemos definir:

$$u_0 = u(t_0) + L^{-1}g(t), \quad (4.8)$$

e substituindo a definição representada pela equação (4.8) na equação (4.7), tem-se que:

$$u(t) = u_0 - L^{-1}Nu(t) - L^{-1}Ru(t) \quad (4.9)$$

Agora, vamos definir as seguintes expansões em forma de séries:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (4.10)$$

$$Nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.11)$$

onde  $A_n$  são os chamados polinômios de Adomian.

Podemos substituir as equações (4.10) e (4.11) na equação (4.9), para obter expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (4.12)$$

Assim, eliminado os somatórios podemos determinar, por comparação, cada termo da equação (4.9) da seguinte forma:

$$u_{n+1} = -L^{-1}A_n - L^{-1}Ru_n \quad (4.13)$$

$$u_1 = -L^{-1}A_0 - L^{-1}Ru_0$$

$$u_2 = -L^{-1}A_1 - L^{-1}Ru_1$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}A_n - L^{-1}Ru_0 \quad (4.14)$$

com,

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \frac{df(u_0)}{du_0}$$

$$A_2 = u_2 \frac{df(u_0)}{du_0} + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2 f(u_0)}{du_0^2}$$

A grande vantagem proposta pelo método é teoricamente a sua rápida convergência com poucos termos na série. Portanto, se tratando da física de reatores, ele pode vir a ser de grande utilidade uma vez que podemos diminuir o tempo de computação em cálculos da cinética de reatores. Contudo, existe uma dependência não-linear entre os termos dos polinômios de Adomian de maneira que se a convergência não for rápida a técnica decorrente do método de Adomian pode se tornar impraticável.

### **4.3-Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual para Reatores Críticos sem fonte, com um Grupo de Precursores e Reatividade Constante Pelo Método de Adomian**

Nesta seção será apresentada a solução analítica das equações da cinética pontual para reatores críticos.

Das equações (2.24) e (2.28) sem fonte externa podemos escrever:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho^n - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (2) \text{ com } i=1, \dots, 6 \quad (4.16)$$

Para um único grupo de precursores de nêutrons e para reatividade constante, ou seja,  $\rho^n = \rho_0$ , as equações (4.15) e (4.16) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) + \lambda.C(t) \quad (4.17)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) - \lambda C(t) \quad (4.18)$$

Como foi discutido na secção anterior, como parte do método de Adomian vamos aplicar o operador inverso ao operador predominante na equação (4.17). Assim tem-se que:

$$\int_0^t \frac{dN(t)}{dt} dt = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t N(t) dt + \lambda \int_0^t C(t) dt \quad (4.18)$$

Fazendo a integração, resulta que:

$$N(t) - N(0) = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t N(t) dt + \lambda \int_0^t C(t) dt \quad (4.19)$$

Procedendo de maneira análoga para equação (4.18), vamos obter:

$$C(t) - C(0) = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t N(t) dt - \lambda \int_0^t C(t) dt \quad (4.20)$$

Aplicando as expansões em forma de série representadas pelas equações a seguir:

$$N(t) = \sum_{j=0}^J \phi_j(t) \quad (4.21)$$

$$C(t) = \sum_{j=0}^J \alpha_j(t) \quad (4.22)$$

Assim podemos definir que:

$$N(0) = \phi_0, \quad (4.23)$$

e

$$C(0) = \alpha_0, \quad (4.24)$$

Assim podemos substituir as expansões representadas pelas equações (4.21), e (4.22) e as definições representadas pelas equações (4.23) e (4.24), nas equações (4.19) e (4.20), resultando:

$$\sum_{j=0}^J \phi_j(t) - \phi_0 = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \phi_j(t) dt + \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \alpha_j(t) dt \quad (4.25)$$

e

$$\sum_{j=0}^J \alpha_j(t) - \alpha_0 = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \phi_j(t) dt - \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \alpha_j(t) dt \quad (4.26)$$

Sabendo que a expansão representada pela equação (4.21), tem a seguinte forma:

$$\sum_{j=0}^J \phi_j(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t) + \dots + \phi_J(t), \quad (4.27)$$

É fácil constatar que o termo  $\phi_0$  vai desaparecer do lado esquerdo da equação (4.25), assim podemos escrever:

$$\sum_{j=0}^J \phi_j(t) - \phi_0 = \sum_{j=0}^{J-1} \phi_{j+1}(t) \quad (4.28)$$

È fácil perceber que o mesmo fato ocorre no lado esquerdo da equação (4.26), assim tem-se que:

$$\sum_{j=0}^J \alpha_j(t) - \alpha_0 = \sum_{j=0}^{J-1} \alpha_{j+1}(t) \quad (4.29)$$

Agora aplicando os resultados representados pelas equações (4.28) e (4.29) nas equações (4.25) e (4.26), vamos obter:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \phi_{j+1}(t) = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \phi_j(t) dt + \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \alpha_j(t) dt \quad (4.30)$$

Podemos colocar o somatório do lado direito da equação (4.28) em evidência, logo se tem que:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \phi_{j+1}(t) = \sum_{j=0}^J \left( \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \right) \int_0^t \phi_j(t) dt + \lambda \int_0^t \alpha_j(t) dt \quad (4.31)$$

Assim partindo da equação (4.29) podemos obter a série termo a termo:

$$\phi_{j+1}(t) = \left( \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \right) \int_0^t \phi_j(t) dt + \lambda \int_0^t \alpha_j(t) dt \quad (4.32)$$

Procedendo de maneira análoga com a equação (4.26), vamos obter a série termo a termo:

$$\alpha_{j+1}(t) = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \phi_j(t) dt - \lambda \int_0^t \alpha_j(t) dt \quad (4.33)$$

Essas são as equações da cinética segundo o método de Adomian. O próximo passo será a obtenção da formula de recorrência dos coeficientes para série segundo o método:

Para  $j=0$  na equação (4.30), tem-se que:

$$\phi_1(t) = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \phi_0 dt + \lambda \int_0^t \alpha_0 dt \quad (4.34)$$

Podemos definir inicialmente que:

$$\phi_0 = A_0$$

e

$$\alpha_0 = B_0$$

Substituindo essas definições na equação (4.32), tem-se que:

$$\phi_1(t) = \left(\frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n}\right) A_0 \int_0^t dt + \lambda B_0 \int_0^t dt \quad (4.33)$$

Colocando a variável t em evidência, pode-se escrever o primeiro termo da série da seguinte maneira:

$$\phi_1(t) = \left[\left(\frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n}\right) A_0 + \lambda B_0\right] t = A_1 t \quad (4.34)$$

Procedendo de maneira análoga a descrita com a equação (4.31) com a equação (4.30), tem-se que:

$$\alpha_1(t) = \left(\frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} A_0 - \lambda B_0\right) t = B_1 t \quad (4.35)$$

Agora para j=1 substituído na equação (4.31), tem-se que:

$$\phi_2(t) = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \phi_1 dt + \lambda \int_0^t \alpha_1 dt \quad (4.36)$$

E substituindo os valores representados pelas equações (4.34) e (4.35) na equação (4.36), tem-se que:

$$\phi_2(t) = \left(\frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n}\right) A_1 \int_0^t t dt + \lambda B_1 \int_0^t t dt, \quad (4.37)$$

Assim, pode-se resolver as integrais presentes na equação (4.37) e colocar o resultado obtido em evidência, logo tem-se que:

$$\phi_2(t) = \left[\left(\frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{2 \cdot \Lambda_{ef}^n}\right) A_1 + \frac{\lambda}{2} B_1\right] t^2 = A_2 t^2, \quad (4.38)$$

Novamente procedendo de maneira análoga ao procedimento realizado para equação (4.29) na equação (4.30), tem-se que:

$$\alpha_2(t) = \left( \frac{\beta_{ef}^n}{2\Lambda_{ef}^n} A_1 - \frac{\lambda}{2} B_1 \right) t^2 = B_2 t^2, \quad (4.39)$$

Agora para  $j=2$  aplicado na equação (4.30), tem-se que:

$$\phi_3(t) = \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \phi_2 dt + \lambda \int_0^t \alpha_2 dt, \quad (4.40)$$

E substituindo o resultado representado pelas equações (4.34) e (4.35) na equação (4.40), tem-se que:

$$\phi_3(t) = \left( \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \right) A_2 \int_0^t t^2 dt + \lambda B_2 \int_0^t t^2 dt, \quad (4.41)$$

Solucionando as integrais presentes na equação (4.41) e colocando o resultado em evidência, tem-se que:

$$\phi_2(t) = \left[ \left( \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{3\Lambda_{ef}^n} \right) A_2 + \frac{\lambda}{2} B_2 \right] t^3 = A_3 t^3, \quad (4.42)$$

Procedendo de maneira análoga para equação (4.31) como o procedimento realizado com a equação (4.30) para  $j=2$ , tem-se que:

$$\alpha_3(t) = \left( \frac{\beta}{3\Lambda} A_2 - \frac{\lambda}{3} B_2 \right) t^3 = B_3 t^3, \quad (4.43)$$

Assim partindo da expansão da série representada pela equação (4.21), tem-se que:

$$n(t) = \sum_{j=0}^J \phi_j(t) = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_J, \quad (4.44)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (4.34), (4.38) e (4.42) na equação (4.43) pode-se expressar a densidade de nêutrons pela seguinte expressão:

$$n(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots + A_J t^J = \sum_{j=0}^J A_j t^j, \quad (4.45)$$

De maneira análoga é fácil constatar que a expressão para a concentração de precursores de nêutrons é dada por:

$$C(t) = \sum_{j=0}^J B_j \cdot t^j, \quad (4.46)$$

Onde t o intervalo fixo de tempo,  $A_j$  e  $B_j$  são os coeficientes que são expressos pela seguinte fórmula de recorrência:

$$A_{j+1} = \left[ \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{(j+1) \cdot \Lambda_{ef}^n} \right] \cdot A_j + \frac{\lambda}{(j+1)} B_j, \quad (4.47)$$

e

$$B_{j+1} = \frac{\beta_{ef}^n}{(j+1) \cdot \Lambda_{ef}^n} A_j - \frac{\lambda}{(j+1)} B_j \quad (4.48)$$

#### **4.4-Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual para Reatores Subcríticos com fonte fixa, um Grupo de Precursores e Reatividade Constante Pelo Método de Adomian**

Na seção anterior foi resolvido o problema da cinética pontual sem fonte, ou seja, um problema diferencial não linear homogêneo, logo o método de Adomian resolveu sem maiores dificuldades, já nesta seção será apresentado o caso da cinética para reatores subcríticos onde existe a necessidade do uso de uma fonte externa para poder existir a multiplicação dos nêutrons, assim passou-se a ter um problema diferencial não-linear e não-homogêneo sendo necessária uma solução geral do tipo:

$$P_{GERAL}(t) = P_{HOMOGENEA}(t) + P_{PARTICULAR}(t), \quad (4.49)$$

Onde a homogênea é obtida pelo método de Adomian enquanto a particular por alguns dos outros métodos existentes na literatura.

Assim para conjunto de equações (3.39) e (3.40), será resolvido de maneira satisfazer a equação (4.48).

Logo, partindo das equações da cinética pontual para reatores subcríticos, equações essas propostas pela referência [4], temos que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^I \lambda_i \cdot C_i(t) - \frac{\Gamma}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + Q_{ext}, \quad (4.50)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (4.51)$$

Para um único grupo de precursores podemos escrever as equações descritas acima da seguinte maneira:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \lambda C(t) - \frac{\Gamma}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + Q_{ext}, \quad (4.52)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda C(t), \quad (4.53)$$

A solução da equação homogênea será feita utilizando o método de Adomian, assim é possível escrever o conjunto de equações (4.52) e (4.53) de maneira homogênea, da seguinte forma:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \lambda C(t), \quad (4.54)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda C(t) \quad (4.55)$$

Partindo das equações acima vamos aplicar o operador inverso ao predominate nas equações, logo:

$$\int_0^t \frac{dP(t)}{dt} dt = \int_0^t \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) dt + \lambda \int_0^t C(t) dt, \quad (4.56)$$

$$\int_0^t \frac{dC(t)}{dt} dt = \int_0^t \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} .P(t)dt - \lambda \int_0^t C(t), \quad (4.57)$$

Resolvendo as integrais dos membros esquerdos de ambas as equações descritas acima, deve-se obter:

$$P(t) - P(0) = \int_0^t \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} P(t)dt + \lambda \int_0^t C(t)dt, \quad (4.58)$$

$$C(t) - C(0) = \int_0^t \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} .P(t)dt - \lambda \int_0^t C(t), \quad (4.59)$$

Pode-se definir que:

$$P(0) = P_0 = \mu_0 \quad (4.60)$$

e

$$C(0) = C_0 = \theta_0 \quad (4.61)$$

Substituindo as definições representadas pelas equações (4.60) e (4.61), nas equações (4.57) e (4.58), obtém o seguinte resultado:

$$P(t) - P_0 = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t P(t)dt + \lambda \int_0^t C(t)dt, \quad (4.62)$$

$$C(t) - C_0 = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t P(t)dt - \lambda \int_0^t C(t) \quad (4.63)$$

De acordo com o método de Adomian proposto pelas referências [2], [5], [6] e [7] vamos definir as seguintes expansões em forma de série:

$$P(t) = \sum_{j=0}^J \mu_j(t) \quad (4.64)$$

e,

$$C(t) = \sum_{j=0}^J \theta_j(t) \quad (4.65)$$

Substituindo as definições propostas pelas equações (4.64) e (4.65) nas equações (4.62) e (4.63) de maneira obter:

$$\sum_{j=0}^J \mu_j - \mu_0 = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \mu_j(t) dt + \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \theta_j(t) dt, \quad (4.66)$$

$$\sum_{j=0}^J \theta_j - \theta_0 = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \mu_j(t) dt - \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \theta_j(t) dt \quad (4.67)$$

Partindo das definições representadas pelas equações (4.64) e (4.65) é possível escrever que:

$$P(t) = \sum_{j=0}^J \mu_j(t) = \mu_0 + \sum_{j=1}^J \mu_j(t) \quad (4.68)$$

e,

$$C(t) = \sum_{j=0}^J \theta_j(t) = \theta_0 + \sum_{j=1}^J \theta_j(t) \quad (4.69)$$

Substituindo as equações (4.68) e (4.69) nas equações (4.66) e (4.67) e realizando uma pequena troca de índice, vai se obter:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \mu_{j+1}(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \mu_j(t) dt + \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \theta_j(t) dt, \quad (4.70)$$

$$\sum_{j=0}^{J-1} \theta_{j+1}(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \sum_{j=0}^J \mu_j(t) dt - \lambda \int_0^t \sum_{j=0}^J \theta_j(t) dt \quad (4.71)$$

Partindo das equações (4.70) e (4.71) eliminando os somatórios podemos obter a série termo a termo, da seguinte maneira:

$$\mu_{j+1}(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_j(t) dt + \lambda \int_0^t \theta_j(t) dt, \quad (4.72)$$

$$\theta_{j+1}(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_j(t) dt - \lambda \int_0^t \theta_j(t) dt \quad (4.73)$$

Para  $j=0$  substituindo na equação (4.72), tem-se que:

$$\mu_1(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_0 dt + \lambda \int_0^t \theta_0 dt, \quad (4.74)$$

Resolvendo as integrais e na equação (4.74) é possível escrever os termos da equação da seguinte maneira:

$$\mu_1(t) = \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \mu_0 + \lambda \theta_0 \right] t \quad (4.75)$$

Ainda é possível escrever a equação (4.75) da seguinte maneira:

$$\mu_1(t) = X_1 t, \quad (4.76)$$

Para  $j=0$  e procedendo de maneira análoga na equação (4.73) tem-se que:

$$\theta_1(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_0 dt - \lambda \int_0^t \theta_0 dt, \quad (4.77)$$

Ao resolver as integrais e rearranjar os termos na equação (4.77) pode-se escrever da seguinte maneira:

$$\theta_1(t) = \left( \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \mu_0 - \lambda \theta_0 \right) t = Y_1 t, \quad (4.78)$$

Para  $j=1$  substituindo na equação (4.72) tem-se que:

$$\mu_2(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_1(t) dt + \lambda \int_0^t \theta_1(t) dt, \quad (4.79)$$

Substituindo as equações (4.76) e (4.78) na equação (4.79) encontra-se que:

$$\mu_2(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} X_1 \int_0^t t dt + \lambda Y_1 \int_0^t t dt \quad (4.80)$$

Resolvendo a integração e rearranjando os termos da equação (4.80), pode-se escrever da seguinte forma:

$$\mu_2(t) = \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{2\Lambda_{ef}^n} X_1 + \frac{\lambda}{2} Y_1 \right] t^2 = X_2 t^2, \quad (4.81)$$

Para  $j=1$  na equação (4.73), tem-se que:

$$\theta_2(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_1 dt - \lambda \int_0^t \theta_1 dt, \quad (4.82)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (4.76) e (4.78) na equação (4.82) encontra-se:

$$\theta_2(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} X_1 \int_0^t t dt - \lambda Y_1 \int_0^t t dt, \quad (4.83)$$

Resolvendo as integrais e rearranjando os termos presentes na equação (4.83) é possível escrever:

$$\theta_2(t) = \left( \frac{\beta_{i,ef}^n}{2\Lambda_{ef}^n} X_1 - \frac{\lambda}{2} Y_1 \right) t^2 = Y_2 t^2, \quad (4.84)$$

Substituindo  $j=2$  na equação (4.72), tem-se que:

$$\mu_3(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_2(t) dt + \lambda \int_0^t \theta_2(t) dt, \quad (4.85)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (4.81) e (4.84) na equação (4.85), tem-se que:

$$\mu_3(t) = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} X_2 \int_0^t t^2 dt + \lambda Y_2 \int_0^t t^2 dt, \quad (4.86)$$

Solucionando as integrais e rearranjando os termos presentes na equação (4.86), tem-se que:

$$\mu_3(t) = \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{3\Lambda_{ef}^n} X_2 + \frac{\lambda}{3} Y_2 \right] t^3 = X_3 t^3, \quad (4.87)$$

Substituindo  $j=2$  na equação (4.73), tem-se que:

$$\theta_3(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \int_0^t \mu_2 dt - \lambda \int_0^t \theta_2 dt, \quad (4.88)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (4.81) e (4.84) na equação (4.88), tem-se que:

$$\theta_3(t) = \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} X_2 \int_0^t t^2 dt - \lambda Y_2 \int_0^t t^2 dt, \quad (4.89)$$

Resolvendo as integrais é possível escrever a equação (4.89), da seguinte maneira:

$$\theta_3(t) = \left( \frac{\beta_{i,ef}^n}{3\Lambda_{ef}^n} X_2 - \frac{\lambda}{3} Y_2 \right) t^3 = Y_3 t^3, \quad (4.90)$$

Os três valores de  $j$  substituídos nas equações (4.72) e (4.73) são suficientes para podermos ver o formato das séries, assim é possível escrever:

$$P_{HOMOGENEO}(t) = X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3 \dots X_j t^j = \sum_{j=0}^J X_j t^j \quad (4.91)$$

e,

$$C_{HOMOGENEO}(t) = Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2 + Y_3 t^3 \dots Y_j t^j = \sum_{j=0}^J Y_j t^j \quad (4.92)$$

Onde  $X_j$  e  $Y_j$  são os chamados polinômios de Adomian, e apresentam a seguinte forma de recorrência:

$$X_{j+1} = \left[ \frac{\rho_0 - \beta_{ef}^n}{(j+1) \cdot \Lambda_{ef}^n} \right] \cdot X_j + \frac{\lambda}{(j+1)} Y_j \quad (4.93)$$

e,

$$Y_{j+1} = \frac{\beta_{ef}^n}{(j+1) \cdot \Lambda_{ef}^n} X_j - \frac{\lambda}{(j+1)} Y_j \quad (4.94)$$

Essa é a solução homogênea do problema das equações da cinética pontual para reatores subcríticos. Para a solução particular do problema da cinética pontual deve-se propor uma solução, como no caso em questão a fonte externa é uma constante a solução particular também o será, assim:

$$P_{PARTICULAR} = P_p, \quad (4.95)$$

$$C_{PARTICULAR} = C_p, \quad (4.96)$$

Substituindo as expressões representadas pelas equações (4.95) e (4.96) nas equações (4.51) e (4.52), tem-se que:

$$\frac{dP_p}{dt} = \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} P_p + \lambda C_p + Q_{ext}, \quad (4.97)$$

$$\frac{dC_p}{dt} = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P_p - \lambda C_p, \quad (4.98)$$

Logo podemos escrever as equações (4.97) e (4.98) da seguinte forma:

$$\frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n - \Gamma)}{\Lambda_{ef}^n} P_p + \lambda C_p + Q_{ext} = 0, \quad (4.99)$$

$$\frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P_p - \lambda C_p = 0, \quad (4.100)$$

Assim da equação (4.100) pode-se obter a seguinte relação:

$$C_p = \frac{\beta_{ef}^n}{\lambda \Lambda_{ef}^n} \cdot P_p, \quad (4.101)$$

Substituindo a expressão obtida na equação (4.10) na equação (4.99), tem-se que:

$$P_p = \frac{-\Lambda_{ef}^n Q_{ext}}{(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.102)$$

Substituindo a expressão representada pela equação (4.102) na equação (4.101), tem-se que:

$$C_p = \frac{-\beta_{i,ef}^n Q_{ext}}{\lambda(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.103)$$

Assim é possível escrever a solução geral das equações da cinética pontual para reatores subcríticos com reatividade constante da seguinte forma:

$$P(t) = \sum_{j=0}^J X_j t^j - \frac{\Lambda_{ef}^n Q_{ext}}{(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.104)$$

$$C(t) = \sum_{j=0}^J Y_j t^j - \frac{\beta_{i,ef}^n Q_{ext}}{\lambda(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.105)$$

É valido ressaltar que para uma solução de uma equação não homogênea as condições iniciais também vão mudar, uma vez que existe a solução particular que influenciará nos termos da série da solução da homogênea, inicialmente podemos escrever da seguinte maneira:

$$P_0 = x_0 - \frac{\Lambda_{ef}^n Q_{ext}}{(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.106)$$

Logo se tem que:

$$X_0 = P_0 + \frac{\Lambda_{ef}^n Q_{ext}}{(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.107)$$

De maneira análoga procedemos com a solução geral da concentração de precursores representada da seguinte maneira:

$$C_0 = Y_0 - \frac{\beta_{i,ef}^n Q_{ext}}{\lambda(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.108)$$

Assim podemos escrever que:

$$Y_0 = C_0 + \frac{\beta_{ef}^n Q_{ext}}{\lambda(\rho^n - \Gamma)}, \quad (4.109)$$

#### **4.5-Solução Numérica das Equações da Cinética Pontual Sem Fonte Externa**

Nesta secção vai ser demonstrado o tratamento numérico para o método de Adomian, através de uma aproximação para um trapézio (Alvim et al, 2007) das integrais encontradas. Para tal vamos partir do problema da cinética de reatores críticos sem fonte externa, para uma reatividade qualquer e para seis grupos de precursores.

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) + \sum_{i=0}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (4.110)$$

e

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta_{ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} N(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (4.111)$$

De acordo com o método de Adomian (Adomian, 1994), o primeiro passo é aplicar o operador inverso ao operador linear que neste caso é uma diferencial simples, assim:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dP(t)}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \right] dt, \quad (4.112)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dC(t)}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda_i C_i(t) \right] dt \quad (4.113)$$

Assim resolvendo o lado esquerdo é possível escrever as equações (4.112) e (4.113) da seguinte maneira:

$$P(t_{i+1}) - P(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \right] dt, \quad (4.114)$$

$$C_i(t_{i+1}) - C_i(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) - \lambda_i C_i(t) \right] dt$$

(4.115)

O próximo passo do método são as definições das expansões em forma de série, como mostrado nas equações abaixo:

$$P(t_{i+1}) = \sum_{j=1}^J \chi_j(t_{i+1}) \quad (4.116)$$

e

$$C_i(t_{i+1}) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^J \psi_{i,j}(t_{i+1}) \quad (4.117)$$

Substituindo as definições em forma de série representadas pelas equações (4.116) e (4.117) nas equações (4.114) e (4.115) se tem que:

$$\sum_{j=1}^J \chi_j(t_{i+1}) - P(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) dt + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \right] dt, \quad (4.118)$$

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^J \psi_{i,j}(t_{i+1}) - C_i(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[ \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} \cdot P(t) dt - \lambda_i C_i(t) \right] dt \quad (4.119)$$

Como já mostrado anteriormente o termo inicial é subtraído e é feita uma mudança de índices do lado esquerdo da equação de modo ser possível escrever as equações (4.118) e (4.119) da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{J-1} \chi_{j+1}(t_{l+1}) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[ \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \right] dt \quad (4.120)$$

e

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^J \psi_{i,j+1}(t_{l+1}) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[ \frac{\beta_{i,ef}^n}{\Lambda_{ef}^n} P(t) dt - \lambda_i C_i(t) \right] dt \quad (4.121)$$

O próximo passo é a aproximação do lado direito da equação por um trapézio, como mostrado a seguir:

$$f(t) \equiv \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (4.122)$$

$$g(t) \equiv \frac{(\rho^n - \beta_{ef}^n)}{\Lambda_{ef}^n} P(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (4.123)$$

Assim de acordo com o método do trapézio (Alvim, 2007) é possível escrever as equações (4.122) e (4.123) da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{J-1} \chi_{j+1}(t_{l+1}) = \frac{1}{2}(t_{l+1} - t_l) \sum_{j=1}^J [f_j(t_{l+1}) + f_j(t_l)] \quad (4.124)$$

e

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^6 \psi_{i,j+1}(t_{l+1}) = \frac{1}{2}(t_{l+1} - t_l) \sum_{j=1}^J [g_{i,j}(t_{l+1}) + g_{i,j}(t_l)] \quad (4.125)$$

Eliminando os somatórios é possível obter as séries termo a termo como mostrado nas equações abaixo:

$$\chi_{j+1}(t_{l+1}) = \frac{1}{2} [f_j(t_{l+1}) + f_j(t_l)] \cdot (t_{l+1} - t_l) \quad (4.126)$$

e

$$\psi_{i,j+1}(t_{l+1}) = \frac{1}{2} [g_{i,j}(t_{l+1}) + g_{i,j}(t_l)] \cdot (t_{l+1} - t_l) \quad (4.127)$$

Onde os termos das equações (4.126) e (4.127) são representados nas equações abaixo:

$$f_j(t_{l+1}) \equiv \frac{(\rho(t_{l+1}) - \beta_{ef}^\varepsilon)}{\Lambda_{ef}^\varepsilon} \chi_j(t_{l+1}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \psi_{i,j}(t_{l+1}), \quad (4.128)$$

$$f_j(t_l) \equiv \frac{(\rho(t_l) - \beta_{ef}^\varepsilon)}{\Lambda_{ef}^\varepsilon} \chi_j(t_l) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \psi_{i,j}(t_l), \quad (4.129)$$

$$g_{i,j}(t_{l+1}) \equiv \frac{\beta_{i,ef}^\varepsilon}{\Lambda_{ef}^\varepsilon} \chi_j(t_{l+1}) - \lambda_i \psi_{i,j}(t_{l+1}) \quad (4.130)$$

e

$$g_{i,j}(t_l) \equiv \frac{\beta_{i,eff}^\varepsilon}{\Lambda_{eff}^\varepsilon} \chi_j(t_l) - \lambda_i \psi_{i,j}(t_l) \quad (4.131)$$

# CAPITULO V

## Resultados e discussões

### 5.1-Introdução

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para método de Adomian nas modalidades analítica e numérica através das equações obtidas no capítulo anterior. As tabelas serão dispostas de maneira inicialmente mostrar os resultados da solução das equações da cinética pontual para reatores críticos sem fonte, depois serão exibidos os resultados para o método analítico e numérico para as equações da cinética pontual para reatores críticos e subcríticos ambos com fonte. Para fins de comparação foi feito o uso do método das diferenças finitas (Alvim et al, 2007) para cada caso que foi estudado com o método de Adomian, os valores obtidos por esse importante método numérico foram utilizados como referencia para testar a eficiência do método de Adomian.

Para os resultados gerados nesse trabalho foi utilizado um computador equipado com processador Intel Core I3 3.076 GHz com 1.86 GB de memória RAM, no qual instalamos o software “COMPAC VISUAL FORTRAN 6.6”.

### 5.2-Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores críticos sem fonte externa

Quando se trabalham as equações da cinética pontual para reatores críticos sem fonte externa existe a vantagem de ser um problema homogêneo sem solução particular assim é possível obter resultados para qualquer tipo de inserção de reatividade, para este problema em particular, irão se mostrados conjunto de dados obtidos para reatividade linear e senoidal diferente do problema não homogêneo que apenas temos solução para reatividade constante como será mostrado nas próximas seções. Os dados utilizados para este tipo de reator estão presentes no apêndice A.

**Tabela 5.1-Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e reatividade linear.**

Tempo (s)	Adomian Numérico	Diferenças Finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	1.00000E+00	1.00000E+00	0.00000
1.0	1.39238E+00	1.39238E+00	0.00000
2.0	2.48780E+00	2.48780E+00	0.00000
3.0	6.97566E+00	6.97566E+00	0.00000
4.0	5.50587E+01	5.50587E+01	0.00000
5.0	2.92176E+03	2.92176E+03	0.00000
6.0	1.67663E+06	1.67663E+06	0.00000
7.0	1.13469E+10	1.13469E+10	0.00000
8.0	9.20165E+14	9.20165E+14	0.00000

Nesse problema foram utilizados sete termos na série e oito mil pontos de discretização apresentando um resultado idêntico ao do método de referência. O tempo gasto está exposto na tabela abaixo:

**Tabela 5.2-Tempo gasto para realização dos cálculos**

Método utilizado	Tempo gasto (s)
Método de Adomian analítico	0.146
Método das diferenças finitas	0.125
Diferença entre eles	0.021

**Tabela 5.3-Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e com reatividade linear.**

Tempo (s)	Adomian Numérico	Diferenças Finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	9.37500E+01	9.37500E+01	0.00000
1.0	9.48849E+01	9.48849E+01	0.00000
2.0	1.00921E+02	1.00921E+02	0.00000
3.0	1.23079E+02	1.23079E+02	0.00000
4.0	2.65031E+02	2.65031E+02	0.00000
5.0	4.82432E+03	4.82432E+03	0.00000
6.0	1.72160E+06	1.72160E+06	0.00000
7.0	8.61157E+09	8.61157E+09	0.00000
8.0	5.55458E+14	5.55458E+14	0.00000

Para o cálculo da concentração de precursores assim como caso da variação temporal da potência nuclear foram utilizados sete termos na expansão em forma de série e oito mil pontos de discretização. Não diferente do caso anteriormente exibido não houve qualquer diferença entre os resultados obtidos pelo método de Adomian numérico e os valores obtidos pelo método de referência (método das diferenças finitas).

Para este caso em particular que é o caso mais simples, pois como já foi dito trata-se de um problema homogêneo, ou seja, sem fonte externa o método obteve resultados excelentes com alta eficiência quando comparado ao método de referência.

**Tabela 5.4-Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e reatividade senoidal.**

Tempo (s)	Adomian Numérico	Diferenças Finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	1.00000E+00	1.00000E+00	0.00000
1.0	1.33225E+00	1.33225E+00	0.00000
2.0	1.52403E+00	1.52403E+00	0.00000
3.0	1.18329E+00	1.18329E+00	0.00000
4.0	8.72198E-01	8.72198E-01	0.00000
5.0	7.91627E-01	7.91627E-01	0.00000
6.0	9.15181E-01	9.15181E-01	0.00000
7.0	1.25309E+00	1.25309E+00	0.00000
8.0	1.57282E+00	1.57282E+00	0.00000

Da mesma maneira que no caso da reatividade linear, neste problema foram utilizados sete termos na série e oito mil pontos de discretização, e o resultado obtido foi idêntico ao obtido com o método das diferenças finitas. O tempo gasto no calculo é mostrado na tabela abaixo:

**Tabela 5.5-Tempo gasto para realização dos cálculos**

Método utilizado	Tempo gasto (s)
Método de Adomian analítico	0.152
Método das diferenças finitas	0.125
Diferença entre eles	0.027

**Tabela 5.6-Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores, sem fonte externa e com reatividade senoidal.**

Tempo (s)	Adomian Numérico	Diferenças Finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	9.37500E+01	9.37500E+01	0.00000
1.0	9.47932E+01	9.47932E+01	0.00000
2.0	9.81265E+01	9.81265E+01	0.00000
3.0	1.00504E+02	1.00504E+02	0.00000
4.0	1.00027E+02	1.00027E+02	0.00000
5.0	9.82035E+01	9.82035E+01	0.00000
6.0	9.66844E+01	9.66844E+01	0.00000
7.0	9.69646E+01	9.69646E+01	0.00000
8.0	9.99083E+01	9.99083E+01	0.00000

Para o cálculo da concentração de precursores assim como caso da variação temporal da potência nuclear foram utilizados sete termos na expansão em forma de série e oito mil pontos de discretização. Não diferente do caso da reatividade linear não houve qualquer diferença entre os resultados obtidos pelo método de Adomian numérico e os valores obtidos pelo método de referência (método das diferenças finitas).

Para este caso em particular cujo a reatividade inserida ao sistema senoidalmente foram obtidos resultados excelentes com alta eficiência quando comparado ao método de referência.

Podemos constatar através das tabelas exibidos anteriormente que para o caso em que não a presença da fonte externa e independente do tipo de reatividade do sistema o método de Adomian mostra resultados perfeitos, ou seja, sem qualquer diferença com relação ao método das diferenças finitas.

### **5.3-Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores críticos com fonte externa**

Nesta seção serão exibidos os resultados provenientes da aplicação do método de Adomian analítico e também numérico nas equações da cinética pontual para reatores críticos com fonte externa, os dados utilizados para os cálculos encontram-se no apêndice A (Duderstadt et al., 1976) . Nesta seção a coluna que corresponde ao método de Adomian não faz referência se o método é analítico ou numérico, pois ambos apresentaram resultados idênticos.

**Tabela 5.7-Variação da potência nuclear no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores reatividade constante.**

Tempo(s)	Método de Adomian	Método das diferenças finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	1.00000	1.00000	0.00000
1.0	1.74633	1.74633	0.00000
2.0	1.83598	1.83598	0.00000
3.0	1.92509	1.92509	0.00000
4.0	2.01773	2.01773	0.00000
5.0	2.11406	2.11406	0.00000
6.0	2.21423	2.21423	0.00000
7.0	2.31838	2.31838	0.00000
8.0	2.42669	2.42669	0.00000

**Tabela 5.8-Variação da concentração de precursores no tempo para reatores críticos com um grupo de precursores**

Tempo(s)	Método de Adomian	Método das diferenças finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	9.37500E+01	9.37500E+01	0.00000
1.0	9.79516E+01	9.79516E+01	0.00000
2.0	1.03342E+02	1.03342E+02	0.00000
3.0	1.08954E+02	1.08954E+02	0.00000
4.0	1.14789E+02	1.14789E+02	0.00000
5.0	1.20856E+02	1.20856E+02	0.00000
6.0	1.27166E+02	1.27166E+02	0.00000
7.0	1.33727E+02	1.33727E+02	0.00000
8.0	1.40549E+02	1.40549E+02	0.00000

Para esses cálculos foram utilizados oitocentos mil pontos de discretização e sete termos na série, o tempo gasto nos cálculos é mostrado na tabela abaixo:

**Tabela 5.9-Tempo gasto para realização dos cálculos**

Método utilizado	Tempo gasto (s)
Método de Adomian analítico	11.56
Método das diferenças finitas	11.13
Diferença entre eles	0.43

Ambos os métodos apresentaram para o caso em que a reatividade é constante, com um grupo de precursores mostraram um excelente resultado não existindo qualquer diferença entre ambos nem para o caso da potência nuclear nem a variação temporal da concentração de precursores.

#### **5.4-Resultados obtidos para as equações da cinética pontual para reatores subcríticos com fonte externa**

Nesta seção serão exibidos os resultados provenientes da aplicação do método de Adomian nas equações da cinética pontual para reatores subcríticos com fonte externa fixa o método de Adomian na modalidade analítica ou numérica não apresentou qualquer diferença de valores entre si sendo assim as tabelas não fazem distinção se o método é analítico ou numérico os dados utilizados para os cálculos encontram-se no apêndice A (Nishihara et al., 2003).

**Tabela 5.10-Variação da potência nuclear no tempo para reatores subcríticos com um grupo de precursores e reatividade constante**

Tempo(s)	Método de Adomian	Método das diferenças finitas	Erro relativo percentual (%)
0.0	1.89970E+01	1.89970E+01	0.00000
1.0	1.12450E+00	1.12449E+00	0.00088
2.0	4.96531E-01	4.96527E-01	0.00080
3.0	2.19516E-01	2.19514E-01	0.00091
4.0	9.73164E-02	9.73149E-02	0.00154
5.0	4.34104E-02	4.34096E-02	0.00184
6.0	1.96308E-02	1.96304E-02	0.00203
7.0	9.14089E-03	9.14068E-03	0.00229
8.0	4.51348E-03	4.51337E-03	0.00243

Diferente dos resultados apresentados anteriormente para reatores críticos houve alguma diferença entre os métodos Adomian analítico e diferenças finitas, algo de pouca relevância uma vez que esse valor percentual é inferior 0.005% mostrando uma boa precisão do método para o caso citado e também diferente do caso em que simulamos condições de reator crítico sem fonte externa foram necessários oitocentos mil pontos de discretização para uma série de sete termos, no caso do reator crítico sem fonte externa apenas oito mil pontos de discretização foram necessários e isso se deve aos valores dos dados utilizados para realização dos cálculos em ambos os casos.

**Tabela 5.11-Variação da concentração de precursores no tempo para reatores subcríticos com um grupo de precursores e reatividade constante**

Tempo(s)	Método de Adomian	Método das diferenças finitas	Erro relativo percentual
0.0	3.61044E+03	3.61044E+03	0.00000
1.0	1.59374E+03	1.59373E+03	0.00062
2.0	7.03138E+02	7.03132E+02	0.00085
3.0	3.10267E+02	3.10263E+02	0.00128
4.0	1.36960E+02	1.36957E+02	0.00219
5.0	6.05084E+01	6.05073E+01	0.00182
6.0	2.67836E+01	2.67830E+01	0.00224
7.0	1.19065E+01	1.19062E+01	0.00251
8.0	5.34376E+00	5.34361E+00	0.00280

Novamente o método mostrou-se bastante preciso com erros relativos percentuais inferiores a 0.005%, o tempo gasto para calculo de discretização de oitocentos mil pontos com sete termos na série foi muito próximo ao encontrado no caso do reator crítico com fonte como mostrado na tabela abaixo:

**Tabela 5.12-Tempo gasto para realização dos cálculos para um grupo**

Método utilizado	Tempo gasto (s)
Método de Adomian analítico	11.98
Método das diferenças finitas	11.54
Diferença entre eles	0.44

Para demonstrar que a eficiência do método permanece a mesma independente do número de precursores utilizados também foi calculado para reatores subcríticos com reatividade constante e seis grupos de precursores, resultado que está exibido na tabela abaixo.

**Tabela 5.13-Variação da potência nuclear no tempo para reatores subcríticos com seis grupos de precursores e reatividade constante**

Tempo(s)	Método de Adomian	Método das diferenças finitas	Erro relativo percentual
0.0	1.89970E+01	1.89970E+01	0.00000
1.0	6.59830E-01	6.59821E-01	0.00136
2.0	5.71105E-01	5.71097E-01	0.00140
3.0	5.11490E-01	5.11482E-01	0.00156
4.0	4.65500E-01	4.65491E-01	0.00193
5.0	4.27945E-01	4.27937E-01	0.00186
6.0	3.96435E-01	3.96427E-01	0.00201
7.0	3.69542E-01	3.69534E-01	0.00216
8.0	3.46278E-01	3.46270E-01	0.00231

Como ocorrido nos resultados obtidos para um único grupo de precursores, seja para valores de dados de reatores críticos, ou subcríticos a eficiência entre o método de Adomian analítico e método das diferenças finitas continuou alta, com erro relativo percentual inferior a 0.005%.

Os resultados exibidos nas tabelas de 5.7 até 5.13 não fazem distinção entre o método de Adomian analítico ou numérico, pois para todos os casos são idênticos os valores obtidos pela técnica na modalidade analítica e numérica.

Os resultados obtidos através da aplicação do método de Adomian em sistemas críticos e subcríticos com fonte produziram bons resultados quando comparado ao método de referência (diferenças finitas), como previsto na teoria (Adomian et al, 1994), contudo tratou-se apenas de um caso onde a reatividade é constante esses resultados não foram possíveis para outros tipos de reatividade como nos casos analisados sem a presença de fonte externa.

O tempo gasto para realização dos cálculos do programa com seis grupos de precursores não mudou muito, como pode ser analisado na tabela abaixo:

**Tabela 5.14-Tempo gasto para realização dos cálculos para seis grupos**

Método utilizado	Tempo gasto (s)
Método de Adomian analítico	14.67
Método das diferenças finitas	14.32
Diferença entre eles	0.35

## 5.5-Discussão

Neste trabalho foi realizada a aplicação do método da decomposição de Adomian em um sistema de equações não-lineares que são as equações da cinética pontual tanto para reatores críticos como subcríticos, para ambos os casos o método de Adomian apresentou uma ótima reprodutibilidade não existindo qualquer diferença entre o método nas modalidades analíticas ou numéricas.

O método mostrou uma excelente eficiência, pois reproduziu de maneira idêntica os resultados para conjuntos de dados de reatores críticos quando comparados a técnica de referência e apesar de haver uma diferença entre os resultados obtidos pelo método testado e o método das diferenças finitas quando os dados utilizados são de reatores subcríticos, essa diferença para todos os casos foram todas inferiores a 0.005% o que ainda garante uma alta eficiência do método de Adomian.

Uma das grandes promessas do método de Adomian está no fato de obter sempre soluções analíticas com eficiência (Adomian, 1988), porém para reatividades diferentes da constante a obtenção de uma solução homogênea analítica mostrou-se bastante complexa quando não impossível. Na maioria dos casos tratados na literatura apesar de serem ambos para soluções de equações não-lineares ou estocásticas todas se tratavam de um problema homogêneos, assim quando foram tratados os casos de reatores críticos ou subcríticos com fonte externa tinha-se um sistema de equações não lineares e não homogêneos não sendo possível obter resultados para reatividade diferente da reatividade constante.

Para as equações da cinética pontual no formato de diferencial de primeira ordem limitando bastante a utilização deste método como solução das equações da cinética pontual com fonte no formato em que elas estão escritas.

## CAPITULO VI

### Conclusões

Como destacado na literatura (Adomian et al, 1994), o método de Adomian apresenta soluções semi-analíticas em forma de série tanto para problemas não lineares e estocásticos, sem ser necessário o uso de aproximações, métodos perturbativos ou mesmo a necessidade de linearizar o problema, o que viria a apresentar um resultado mais físico e menos matemático para um vasto número de problemas de diversas áreas. Contudo a tentativa do método de obter soluções mais reais dos problemas da cinética pontual se mostrou limitada no caso das equações da cinética pontual com fonte externa.

Um dos objetivos deste trabalho foi justamente a tentativa de obtenção de um método que mostrasse um bom resultado com relação a outros métodos encontrados na literatura. Em parte esse objetivo foi obtido para caso em que as equações da cinética pontual não contém fonte externa, já nos casos onde existe uma fonte externa apenas para reatividade constante foi possível obter resultados. Assim devido a limitação nos casos onde há presença de fonte externa e a dificuldade de se obter uma formula de recorrência analítica quando a reatividade não é constante o método de Adomian não se mostra adequado a ser utilizado para o problema em questão. Existe na literatura um grande número de métodos principalmente numéricos que podem vir a serem utilizados para solução do problema da cinética pontual no formato diferencial de primeira ordem com uma maior eficiência.

Para trabalhos futuros podemos indicar a utilização do método de Adomian para solução do problema das equações da cinética pontual de segunda ordem a fim de ver se para este caso é possível obter melhores resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VEIGA, J. E., 2011, “ Energia Nuclear do anátema ao diálogo” Editora SENAC São Paulo.
- [2] SCHANEIDER, E. S., VILHENA, M.T., 2006, “Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian” Dissertação submetida ao Instituto de Matemática da UFRG.
- [3] DUDERSTADT, J.J, HAMILTON, L.J, Nuclear Reactor Analysis. 1º ed. John Wiley & Sons, 1976.
- [4] SILVA, C., MARTINEZ, A.S., SILVA, F.C., 2011, "A new formulation for the importance function in the kinetics of subcritical reactors", aceito para publicação na Annals of Nuclear Energy.
- [5] ADOMIAN, G.1988, “A Review of the Decomposition Method in applied mathematics”. Journal of Mathematical Analysis and applications, vol. 135: p. 501-544.
- [6] ADOMIAN, G. 1994, “Solving Frontier Problems of Physics; Decomposition Method”. Kluwer Academic Publishers.
- [7] CHERRUAULT, Y., 1989, “Convergence of Adomian’s Method” Kybernetes, Vol. 18: p. 31-38.
- [8] ALVIM, A.C. M “Métodos Numéricos em Engenharia Nuclear”, Ed. Certa, 1ed., Curitiba, PR.
- [9] NISHIHARA, K., IWASAKI, T., UDAGAUA Y., 2003. “A new static and dynamic one-point equation and analytic and numerical calculations for subcritical system”, Journal of Nuclear Science and Technology, 481, pp.481-492.

## VIII-APÊNDICE A

### Dados utilizados

#### 8.1-Introdução

Como mencionado no capítulo V os dados dos parâmetros cinéticos utilizados tanto para reatores críticos ou reatores subcríticos estão expostos neste apêndice.

#### 8.2-Valores de dados para reatores críticos

Seguem na tabela abaixo os valores utilizados para cálculos de reatores críticos (Duderstadt, 1976):

**Tabela 8.1- Valores utilizados para reatores críticos com um grupo de precursores**

Dados utilizados	Valores
$\beta_{ef}^n$	0.0075
$\rho_0$	0.0025
$\lambda$	0.08
$\Lambda_{ef}^n$	0.001
Numero de termos na série	7
Numero de pontos de discretização	800000
$Q_{ext}$ (fonte externa)	1.0
$\Gamma$	0.0000000027
Intervalo de transiente	8.0

## 8.2-Valores de dados para reatores subcríticos

Seguem na tabela abaixo os valores dos parâmetros utilizados para reatores subcríticos (Nishihara, 2003):

**Tabela 8.2- Valores utilizados para reatores subcríticos com um grupo de precursores**

Dados utilizados	Valores
$\beta_{ef}^n$	0.00814
$\rho_0$	-0.005264
$\lambda$	0.94506
$\Lambda_{ef}^n$	0.00004532
Numero de termos na série	7
Numero de pontos de discretização	800000
$Q_{ext}$ (fonte externa)	1.0
$\Gamma$	0.0000000027
Intervalo de transiente	8.0

Para o caso de seis grupos de precursores, os valores utilizados além dos descritos na tabela 8.2 são os descritos abaixo:

**Tabela 8.3- Dados para cada grupo de precursor para reatores subcríticos**

Grupo de precursor	1	2	3	4	5	6
$\beta_{i,eff}$	9.2661E-05	7.7736E-04	5.9745E-05	9.8477E-04	3.455E-04	8.9481E-05
$\lambda_i$	0.0127	0.0317	0.115	0.311	1.4	3.87