



UM PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Denis Mota de Sousa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Nuclear.

Orientador: Nilson Costa Roberty

Rio de Janeiro
Dezembro de 2012

UM PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE PARA A
EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Denis Mota de Sousa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:

Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.

Prof. Carlos José Santos Alves, D.Sc.

Prof. Antonio André Novotny, D.Sc.

Prof. Marcello Goulart Teixeira, D.Sc.

Prof. Rolci de Almeida Cipolatti, D.Sc.

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2012

Sousa, Denis Mota de

UM PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO
DE FONTE PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-
ADVECÇÃO/Denis Mota de Sousa. – Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2012.

IX, 52 p. 29,7cm.

Orientador: Nilson Costa Roberty

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia Nuclear, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 52.

1. problemas inversos. 2. reconstrução de
fonte. 3. difusão-advecção. I. Roberty, Nilson Costa.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,
Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

“It is impossible to exaggerate the extent to which modern applied mathematics has been shaped and fueled by the general availability of fast computers with large memories. Their impact on mathematics, both applied and pure, is comparable to the role of the telescopes in astronomy and microscopes in biology.”

Peter Lax, SIAM Review Vol. 31 No. 4

*Dedico a
Francisco e Maria, meus pais,
Gustavo, meu irmão,
Suzi, minha esposa e
Betina, minha filha.*

Agradecimentos

Ao professor Nilson Roberty, pela orientação acadêmica.

Aos professores Carlos Alves, André Novotny, Marcello Goulart, Rolci Cipolatti e Marcelo Colaço, pela honra de tê-los na banca da minha defesa de tese.

Ao professor Ivo Lopez, por todas as vezes em que me ajudou e me incentivou.

À professora Márcia Cerioli, a quem devo meus primeiros passos na vida acadêmica.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática (VMA) do Instituto de Ciências Exatas (ICEEx) da Universidade Federal Fluminense (UFF), pelo incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de doutorado que recebi durante o três primeiros anos de estudos no Programa de Engenharia Nuclear (PEN).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UM PROBLEMA INVERSO DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Denis Mota de Sousa

Dezembro/2012

Orientador: Nilson Costa Roberty

Programa: Engenharia Nuclear

Apresentamos dois algoritmos para o problema inverso de reconstrução de fonte para a equação de difusão-advecção a partir de informações no bordo de um domínio. Um para o caso 1D e outro para o caso 2D. Quando não temos qualquer informação *a priori* sobre a fonte, este problema não tem solução única. Para obter uma boa colocação do problema devemos restringir o espaço das soluções para alguma classe de funções. A abordagem inicial se dá através de uma formulação variacional tendo como espaço de funções testes as soluções da equação modificada de Helmholtz homogênea. Considerando o caso em que a fonte é uma função característica de um intervalo (caso 1D) ou de um conjunto convexo (caso 2D) obtemos um sistema não-linear o qual resolvemos por métodos tipo Newton. Apresentamos simulações numéricas para ilustrar a eficiência do método proposto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

AN INVERSE SOURCE PROBLEM FOR THE DIFFUSION-ADVECTION
EQUATION

Denis Mota de Sousa

December/2012

Advisor: Nilson Costa Roberty

Department: Nuclear Engineering

We present two algorithms for the inverse source problem for the diffusion-advection equation from boundary data. One for the 1D case and another for the 2D case. When we have no *a priori* information about the source, this problem has no unique solution. To obtain well-posedness for the problem we restrict the space of solutions to some class of functions. The initial approach is through a variational formulation having the space of test functions as solutions of the homogeneous Helmholtz modified equation. Considering the case where the source is a characteristic function of an interval (1D case) or a convex set (2D case), we obtain a nonlinear system which solved by Newton type methods. We present numerical simulations to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	4
2.1	A Equação de Difusão-Advecção	4
2.2	Reconstrução de Fontes Difusivo-Advectivas	8
3	Métodos Numéricos para Sistemas de Equações	11
3.1	Regularização de Tikhonov	11
3.2	Método de Levenberg-Marquadt	13
4	Problema Unidimensional	17
4.1	Formulação Variacional	17
4.2	Fontes Características de um Intervalo	20
4.3	Simulações Numéricas	21
4.3.1	Recuperando uma fonte característica de um intervalo	22
4.3.2	Obtendo aproximações para funções de suporte compacto	23
5	Problema Bidimensional	27
5.1	Formulação Variacional	27
5.2	Fontes Características de um Conjunto Convexo	30
5.3	Simulações Numéricas	35
5.3.1	Recuperando uma fonte característica de um conjunto convexo	35
5.3.2	Recuperando uma fonte característica de um conjunto estrelado	40
6	Perspectivas	48
	Referências Bibliográficas	50

Capítulo 1

Introdução

Dizemos que dois problemas são *inversos* se a formulação de um depende da solução do outro. Quando temos um par de problemas com esta propriedade e um destes problemas foi mais estudado, dizemos que este é o *problema direto* e o outro é o *problema inverso*. Estas definições feitas por J. B. Keller em [1] são usadas em muitos textos sobre problemas inversos. Entretanto, existe uma característica mais importante que diferencia este par de problemas.

Em [2] Hadamard classificou um problema como *bem-posto* caso suas soluções satisfaçam os seguintes requisitos:

- *existência* - a solução existe;
- *unicidade* - a solução é única;
- *estabilidade* - a solução depende continuamente dos dados de entrada do problema.

Quando o problema não é bem-posto, isto é, quando ele não satisfaz um dos três requisitos listados, dizemos que o problema é *mal-posto*. A principal característica dos problemas inversos é que frequentemente eles são classificados como mal-postos. Assim, para estudá-los devemos usar alguma estratégia para contornar a dificuldade para solucioná-lo.

Quando a solução de um problema não é única, podemos considerar as soluções deste problema num conjunto menor na tentativa de torná-lo bem-posto. Quando a solução do problema não depende continuamente dos dados de entrada, são utilizados os métodos de *regularização*, que consiste em aproximar o problema a um outro bem-posto. Quanto aos problemas que não tem solução, não é comum ocorrer.

Os problemas inversos considerados em equações diferenciais parciais são os problemas de identificação de parâmetros e do termo fonte da equação, pois os problemas de valores iniciais e problemas de valores no bordo são bem conhecidos e estudados há mais tempo. Saber estimar parâmetros e termos fontes de equações

diferenciais parciais é essencial para tornar possível a simulação de diversos fenômenos naturais, industriais, sociais e econômicos. Além disso, a resolução deste tipo de problema é usada para investigar as propriedades físicas de materiais e para conhecer uma determinada configuração numa região a qual temos acesso apenas a dados do entorno. Existem vários exemplos de problemas inversos em equações diferenciais parciais em [3–5].

Nesta tese consideramos o problema inverso de determinar o termo fonte da equação de difusão-advecção a partir de informações do bordo do domínio. Este problema modela situações onde se deseja localizar fontes poluentes em rios e lagos ou uma fonte térmica num fluido. Quando não temos informações sobre o tipo de função que representa o termo fonte da equação, este problema não possui unicidade de soluções e, portanto, é mal-posto.

Uma maneira de abordar este problema de forma que ele tenha unicidade de solução é considerando classes de funções as quais possam ser recuperadas quando tomadas como termo fonte, como por exemplo funções características de subconjuntos do domínio [6, 7], combinações lineares de funções delta de Dirac [8, 9] ou combinações lineares de outras funções conhecidas [10].

Em 1938, Novikov publicou [11], um trabalho pioneiro em problemas inversos de identificação de fontes, onde foi demonstrado que o problema para a equação de Poisson tem solução única quando temos a informação *a priori* de que a fonte é uma função característica de um conjunto estrelado. Em [12], foi demonstrado que é possível obter o termo fonte para a mesma equação no caso onde é possível aplicar uma separação de variáveis e um dos fatores é conhecido. Em [13] foram apresentados um resultado de unicidade para uma nova classe de fontes definida por $\mathcal{C}(\lambda, F) = \{f \in H^1(\Omega) \mid (\Delta - \lambda)f = F\}$, além de uma técnica baseada no método das soluções fundamentais para resolver numericamente o problema. Em [14] foi apresentada uma outra técnica para reconstruir fontes características de conjuntos estrelado para o mesmo problema baseada no funcional de reciprocidade e usando monômios complexos como funções testes.

Em [9], sob o enfoque do método de elementos de contorno, foi apresentado um método numérico para localizar várias fontes pontuais e suas respectivas potências para o problema de difusão-advecção. Em [8] existe um estudo matemático bastante completo sobre o caso transiente unidimensional deste mesmo problema.

Os resultados apresentados nesta tese foram obtidos dos estudos sobre o problema de reconstrução de fontes para o caso em que sabemos que a fonte é uma função característica de um subconjunto do domínio. Todos eles já foram publicados. Em [15] apresentamos um método numérico para o caso unidimensional considerando que a fonte é uma função característica de um intervalo e em [16] apresentamos resultados parciais obtidos para o problema bidimensional considerando que o termo

fonte é uma função característica de um conjunto estrelado com centro conhecido. Em [17] apresentamos um método numérico para o mesmo problema em [16] mas desta vez foi considerado que o termo fonte é uma função característica de um conjunto estrelado com centro desconhecido.

No Capítulo 2 apresentamos uma dedução para a equação de difusão-advecção, o problema de identificação de fonte e os resultados mais básicos sobre este problema. No Capítulo 3 apresentamos alguns métodos computacionais usados para obter aproximações para soluções de sistemas de equações que foram utilizados nesta tese. No Capítulo 4 apresentamos um estudo do caso unidimensional do problema de reconstrução de fontes difusivo-advectivas a partir de dados no bordo do domínio. No Capítulo 5 voltamos ao caso bidimensional do problema de reconstrução de fontes difusivo-advectivas a partir de dados no bordo do domínio.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos a equação de difusão-advecção, o problema de identificação de fonte que estudamos e os resultados mais básicos sobre este problema. Na Seção 2.1 deduzimos a equação de difusão-advecção e enunciamos alguns dos problemas relacionados mais tradicionalmente estudados. Na Seção 2.2 apresentamos o problema de identificação de fonte para a equação de difusão-advecção. Mostramos que, quando não temos nenhuma informação sobre a fonte, o problema não tem solução única e que é suficiente estudar apenas o problema onde os dados de Dirichlet são nulos.

2.1 A Equação de Difusão-Advecção

Uma *lei de conservação* é uma formulação matemática de um fato físico trivial: a taxa a qual uma quantidade muda em uma dada região deve ser igual a taxa a qual a quantidade flui através de sua fronteira somada com a taxa a qual a quantidade é criada ou destruída no seu interior.

Exemplo 2.1 *Consideremos uma população de uma espécie de animal fixada em uma região geográfica. A taxa a qual esta população muda deve ser igual a taxa de animais que migram para dentro da região, menos a taxa de animais que migram para fora da região, mais a taxa de natalidade, menos a taxa de mortalidade.*

Podemos apresentar exemplos similares para várias outras quantidades, como energia térmica, massa, momento linear, carga elétrica, etc. Equações diferenciais que modelam fenômenos envolvendo estas e outras quantidades são provenientes de alguma lei de conservação. Vejamos o caso da equação de difusão-advecção.

Sejam Ω um conjunto aberto suficientemente regular do \mathbb{R}^2 e $T > 0$. Consideremos a função $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $u(x, t)$ represente a densidade de

alguma substância química no ponto x de um fluido no instante t . Podemos considerar o modelo onde a substância em questão é um poluente e Ω represente um lago.

A densidade em uma região bidimensional pode ser definida pela quantidade de substância que se encontra dentro da região dividida pela área da região. Para definir densidade em um ponto x de Ω , podemos considerar uma sequência de subconjuntos mensuráveis $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ tais que $x \in \omega_k$, para $k \in \mathbb{N}$, e $\mu(\omega_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, onde μ é a medida de Lebesgue, e assim fazemos

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{quantidade em } \omega_k \text{ no tempo } t}{\mu(\omega_k)}.$$

Note que, fixando um subconjunto aberto mensurável ω de Ω , a quantidade da substância em ω no instante t é

$$\int_{\omega} u(x, t) dx$$

e assim a taxa a qual a quantidade em ω muda em relação ao tempo no instante t é

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} u(x, t) dx.$$

A densidade em ω pode mudar pela entrada ou saída da substância pela fronteira de ω , devido a reações químicas ou a existência de uma fonte emissora ou de um sumidouro.

A variação de densidade em ω durante o intervalo de tempo $(0, T)$ causada pela movimentação da substância é representada por uma função $\phi : \omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ chamada *fluxo total*. No caso de existência de fontes ou sumidouros em ω , a taxa total de mudança de densidade causadas por estes no intervalo de tempo $(0, T)$ é dada pela função $f : \omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, o qual chamamos de *termo fonte*.

A quantidade da substância em ω no instante t colocada através de uma fonte é

$$\int_{\omega} f(x, t) dx.$$

E a quantidade da substância que sai de ω pelo bordo da região é

$$\int_{\partial\omega} \phi(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) d\ell,$$

onde $\partial\omega$ é a fronteira de ω e $\mathbf{n}(x)$ é o vetor unitário normal a $\partial\omega$ e exterior a região. Assim, pela lei de conservação de massa, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} u(x, t) dx = - \int_{\partial\omega} \phi(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) dl + \int_{\omega} f(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Do teorema da divergência, temos

$$\int_{\partial\omega} \phi(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) dl = \int_{\omega} \nabla_x \cdot \phi(x, t) dx, \quad (2.2)$$

onde $\nabla_x \cdot \phi$ indica o divergente de ϕ em relação a variável x .

Substituindo (2.2) em (2.1), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} u(x, t) dx = \int_{\omega} -\nabla_x \cdot \phi(x, t) + f(x, t) dx.$$

Como esta igualdade é válida para todo subconjunto mensurável de Ω , temos a equação diferencial

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\nabla_x \cdot \phi(x, t) + f(x, t), \quad (2.3)$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Esta equação é conhecida como *equação da continuidade*.

Consideremos que existe *fluxo difusivo*, isto é, que a substância migra de onde ela está mais concentrada para onde está menos. Dado um ponto x em Ω e um instante t , o fluxo difusivo em (x, t) aponta para a região de decréscimo mais rápido de u em (x, t) , a qual é oposta ao gradiente de u em (x, t) . Este princípio é conhecido como *lei de Fick*. Consideremos também que existe um *fluxo advectivo*, isto é, que há movimento da substância devido ao fluxo do fluido. Assim, o fluxo total é dado pela soma do fluxo difusivo com o fluxo advectivo, o que resulta em

$$\phi(x, t) = -\gamma \nabla_x u(x, t) + \beta u(x, t), \quad (2.4)$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, onde $\gamma > 0$ é uma constante de proporcionalidade conhecida como *termo difusivo* e $\beta \in \mathbb{R}^2$ é um vetor conhecido como *termo advectivo*.

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \gamma \Delta_x u(x, t) + \beta \cdot \nabla_x u(x, t) = f(x, t), \quad (2.5)$$

para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, onde $\Delta_x u$ é o laplaciano de u em relação a variável x . Esta última equação é conhecida como *equação de difusão-advectação*. Quando não ocorre advectação, isto é, quando $\beta = (0, 0)$ a equação (2.5) é conhecida como *equação*

do calor.

Se a substância em questão é radioativa, da teoria das equações diferenciais ordinárias sabemos que seu decaimento é modelado pela equação

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\alpha u(x, t),$$

onde $\alpha > 0$ é chamado *termo de decaimento*. Este tipo de fenômeno pode ser interpretado como um sumidouro e assim, quando considerado, temos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \gamma \Delta_x u(x, t) + \beta \cdot \nabla_x u(x, t) = -\alpha u(x, t).$$

Quando consideramos, além do decaimento, outras fontes despejando a substância em Ω , temos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \gamma \Delta_x u(x, t) + \beta \cdot \nabla_x u(x, t) + \alpha u(x, t) = f(x, t), \quad (2.6)$$

a qual é conhecida como *equação de difusão-advecção-decaimento*, mas é muito comum chamá-la apenas de equação de difusão-advecção.

Em casos onde o sistema está estável, isto é, não varia em relação ao tempo, temos $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$, para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, e temos assim a equação

$$-\gamma \Delta u(x) + \beta \cdot \nabla u(x) + \alpha u(x) = f(x), \quad (2.7)$$

para todo $x \in \Omega$, que é o caso *estacionário* de (2.6).

Neste texto vamos investigar um problema relacionado a equação (2.7). Para simplificar nossos estudos vamos considerar os coeficientes α , β e γ sempre constantes. Dentre os problemas propostos envolvendo esta equação, apresentamos os dois mais conhecidos a seguir.

Problema 2.1 Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\gamma \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Problema 2.2 Dados $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\gamma \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $\partial_n u$ é a derivada direcional de u na direção do vetor unitário normal exterior.

Os Problemas 2.1 e 2.2 são conhecidos, respectivamente, como o *problema de Dirichlet* e o *problema de Neumann* para o caso estacionário da equação de difusão-advecção e as condições imposta sobre u e $\partial_{\mathbf{n}}u$, em $\partial\Omega$, nos mesmos são conhecidas, respectivamente, como *condições de Dirichlet* e *condições de Neumann*.

As definições e os resultados de medida e integração utilizados nesta seção podem ser encontrados em [18] e a dedução da equação de difusão-advecção é inspirada em [19].

2.2 Reconstrução de Fontes Difusivo-Advectivas

Consideremos o problema a seguir.

Problema 2.3 *Dados o termo fonte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e a condição de Dirichlet $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $\partial_{\mathbf{n}}u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u satisfaça*

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases} . \quad (2.8)$$

O problema acima pode ser resolvido encontrando u no problema de Dirichlet associado ao sistema (2.8) e, em seguida, calculando sua derivada na direção do vetor unitário normal exterior a Ω . Se $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Omega)$, o Problema 2.3 tem solução única em $H^{-1/2}(\Omega)$. Uma ótima referência para o estudo sobre os espaços $L^2(\Omega)$, $H^{1/2}(\Omega)$ e $H^{-1/2}(\Omega)$ é [20]. Neste texto também é possível encontrar os resultados que levam a conclusão acima.

O problema inverso associado ao Problema 2.3 investigado neste texto é apresentado a seguir.

Problema 2.4 *Dadas as condições de Dirichlet $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e as condições de Neumann $g_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre o termo fonte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}}u = g_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

O problema acima é mal-posto quando estamos considerando que os dados de entrada e as soluções estão nos espaços usualmente considerados em problemas diretos de equações diferenciais parciais. Para ilustrar a má colocação do Problema 2.4, vejamos um exemplo onde não existe unicidade para a solução.

Exemplo 2.2 *Considere o Problema 2.4 com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| < 1\}$, $\alpha = 1$, $\beta = (1, 1)$, $\gamma = 1$, $u = 0$ e $\partial_{\mathbf{n}}u = 0$, em $\partial\Omega$, onde estamos denotando por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do \mathbb{R}^2 .*

Definamos as funções $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_1(x) = -\|x\|^4 + 2\|x\|^2 - 1,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$, e

$$u_2(x) = -\|x\|^6 + 3\|x\|^2 - 2,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Assim, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_i + (1, 1) \cdot \nabla u_i + u_i = f_i & \text{em } \Omega \\ u_i = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u_i = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.9)$$

para $i = 1, 2$, onde

$$f_1(x) = -\|x\|^4 + 18\|x\|^2 + 4(1 - \|x\|^2)x \cdot (1, 1) - 9,$$

para todo $x \in \Omega$, e

$$f_2(x) = -\|x\|^6 + 36\|x\|^4 + 3\|x\|^2 + 6(1 - \|x\|^4)x \cdot (1, 1) - 14,$$

para todo $x \in \Omega$. Logo f_1 e f_2 são soluções do problema inverso de identificação de fonte considerado neste exemplo, além da solução trivial.

Os métodos para solucionar problemas inversos geralmente consistem na reformulação do problema em termos de um problema aproximado bem-posto. Esse tipo de abordagem é conhecida como *regularização*. Vários métodos de regularização de problemas inversos podem ser vistos em [21].

Uma outra forma de obtermos uma boa colocação para um problema é restringindo a procura da solução para um conjunto menor, isto é, considerando informações *a priori* sobre a fonte. Para os resultados obtidos nesta tese utilizamos esta última estratégia, considerando que o termo fonte no Problema 2.4 pertence a algumas classes especiais de funções.

Se $\omega \subset \Omega$, a função $\chi_\omega : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \omega \\ 0, & \text{se } x \notin \omega \end{cases}, \quad (2.10)$$

para todo $x \in \Omega$, é chamada *função característica* de ω .

Investigamos os casos onde f é uma função característica χ_ω sabendo que $\omega \subset \Omega$ pertence a uma classe especial de conjuntos do \mathbb{R}^2 e propomos uma maneira de obter aproximações para fontes de suporte compacto.

Devemos observar que é suficiente sabermos resolver o Problema 2.4 com condições de Dirichlet nula, isto é, com $g(x) = 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Pois, suponhamos que f seja solução do problema inverso associado ao sistema

$$\begin{cases} -\gamma\Delta w + \beta \cdot \nabla w + \alpha w = f & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} w = g_{\mathbf{n}} - \partial_{\mathbf{n}} v & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde v satisfaz o problema direto associado ao sistema

$$\begin{cases} -\gamma\Delta v + \beta \cdot \nabla v + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Neste caso, como f é conhecido, podemos obter w em (2.11) considerando a primeira linha deste sistema e qualquer uma das outras duas. Assim, tomando-se $u = w + v$ podemos verificar que f também é solução do Problema 2.4. Da mesma forma podemos mostrar que se f é solução do Problema 2.4, então f é também solução do problema inverso associado ao sistema (2.11). Então, podemos nos concentrar em investigar apenas o problema abaixo.

Problema 2.5 *Dada a condição de Neumann $g_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre o termo fonte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Os resultados de não unicidade do problema e o fato de que é suficiente estudar o problema com os dados de Dirichlet nulos são adaptados de [22], onde o mesmo foi demonstrado para a equação de Helmholtz.

Capítulo 3

Métodos Numéricos para Sistemas de Equações

Neste capítulo apresentamos alguns métodos computacionais usados para obter aproximações para soluções de sistemas de equações. Na Seção 3.1 fizemos um breve estudo sobre a regularização de Tikhonov. Na Seção 3.2 apresentamos uma abordagem sobre o método de Newton e, a partir deste, derivamos o método de Levenberg-Marquardt.

3.1 Regularização de Tikhonov

Consideremos o sistema linear

$$Ax = p, \tag{3.1}$$

onde A é uma matriz $M \times N$ e $p \in \mathbb{R}^M$. Sabemos que este tipo de sistema pode ter infinitas soluções, uma única solução ou nenhuma solução. Em muitos problemas práticos, por questão de erros de medida, nos deparamos com sistemas sem soluções ou com soluções distantes das verdadeiras. Neste caso, uma forma de contornar esta dificuldade é usando um método conhecido como *regularização de Tikhonov*, introduzido em [23], que consiste em achar a solução de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \{ \|Ax - p\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 \}. \tag{3.2}$$

O termo λ é conhecido como *parâmetro de regularização* e é tomado sempre positivo.

Observe que (3.2) equivale a

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2, \tag{3.3}$$

onde I é a matriz identidade de ordem N , pois

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} Ax - p \\ \lambda x \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \|Ax - p\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

A equação normal [24] de (3.3) é

$$\begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix},$$

que equivale a

$$(A^T A + \lambda^2 I) x = A^T p,$$

cujas soluções são dadas por

$$x_\lambda = (A^T A + \lambda^2 I)^{-1} A^T p. \quad (3.4)$$

Considerando que $\{u_1, u_2, \dots, u_M\}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ sejam as bases ortonormais de \mathbb{R}^M e \mathbb{R}^N , respectivamente, da decomposição em valores singulares [25] de A e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ seus valores singulares, se

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \cdots & u_M \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right], \quad V = \left[\begin{array}{c|c|c} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_N \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_N \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

então $A = U\Sigma V^T$, com $U^T U = U U^T = I$ e $V^T V = V V^T = I$. Substituindo esta igualdade em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} x_\lambda &= (V\Sigma^T \Sigma V^T + \lambda^2 V V^T)^{-1} V \Sigma^T U^T p \\ &= V (\Sigma^T \Sigma + \lambda^2 I)^{-1} V^T V \Sigma^T U^T p \\ &= V (\Sigma^T \Sigma + \lambda^2 I)^{-1} \Sigma^T U^T p, \end{aligned}$$

que nos leva a expressão

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^N w_\lambda(\sigma_i) \frac{\langle u_i, p \rangle}{\sigma_i} v_i, \quad (3.5)$$

onde

$$w_\lambda(\sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2}, \quad (3.6)$$

para todo $\sigma \in \mathbb{R}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano. A expressão (3.5) é a solução

de (3.1) por mínimos quadrados acrescida do filtro (3.6).

Note que $0 \leq w_\lambda(\sigma) < 1$, para todo $\sigma \in \mathbb{R}$, e também que $w_\lambda(\sigma) \approx 1$, quando $\sigma \gg \lambda$. Assim quando se usa a regularização de Tikhonov com parâmetro de regularização λ para o problema (3.1), na solução x_λ são consideradas principalmente as componentes da solução por mínimos quadrados de (3.1) com valores singulares maiores que λ , enquanto os valores menores são suavizados.

As Figuras 3.1 e 3.2 mostram o gráfico de $w_\lambda : (0, 100) \rightarrow \mathbb{R}$ para $\lambda = 5$ e $\lambda = 20$, respectivamente.

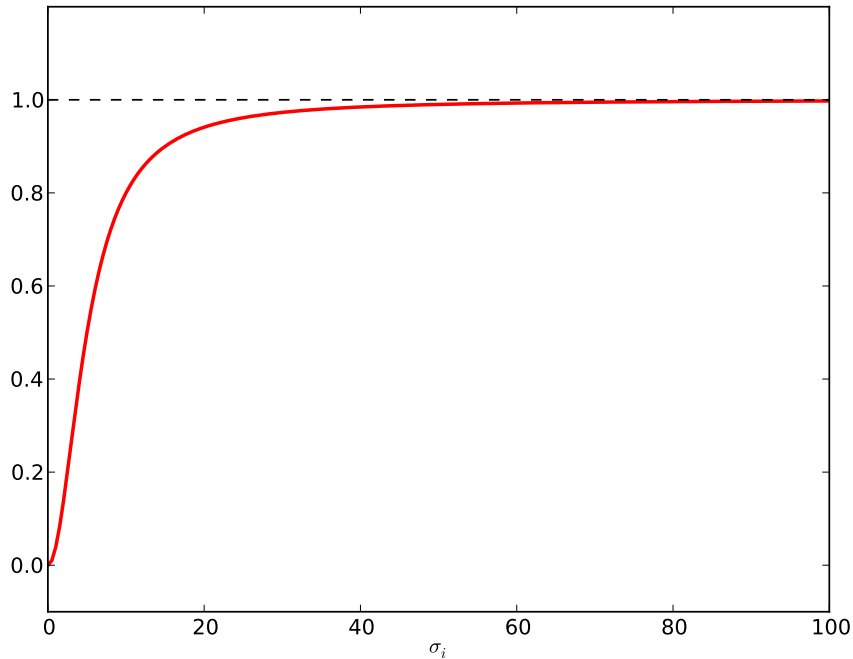


Figura 3.1: Gráfico de $w_\lambda : (0, 100) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lambda = 5$.

3.2 Método de Levenberg-Marquadt

O método que apresentamos nesta seção foi introduzido por Levenberg [26] e depois apresentado por Marquardt [27] sobre um contexto de estatística. Ele pertence a uma classe de métodos numéricos iterativos para aproximar soluções de sistemas não-lineares conhecida como *métodos tipo Newton*.

Consideremos a equação

$$F(x) = p, \tag{3.7}$$

onde $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é uma função não-linear razoavelmente regular e $p \in \mathbb{R}^M$ é conhecido.

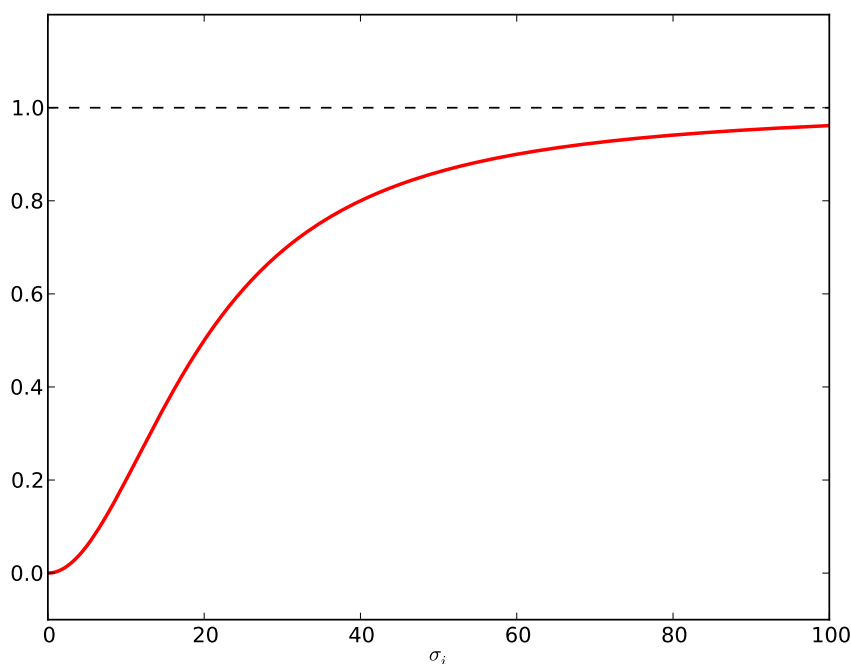


Figura 3.2: Gráfico de $w_\lambda : (0, 100) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lambda = 20$.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$, aproximando F em um ponto x próximo ao x_0 por polinômio de Taylor de grau 1, temos

$$F(x) \approx F(x_0) + J_F(x_0)(x - x_0), \quad (3.8)$$

onde $J_F(x_0)$ é a *matriz jacobiana* de F no ponto x_0 definida por

$$J_F(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x_0)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_M(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_M(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_M(x_0)}{\partial x_N} \end{bmatrix}.$$

Assim, igualando (3.8) a p , trocamos a equação não linear (3.7) por uma versão linearizada deste problema dada por

$$J_F(x_0)(x - x_0) = p - F(x_0).$$

Considerando $M = N$ e $J_F(x_0)$ inversível, este problema tem solução única dada por

$$x_1 = x_0 + J_F(x_0)^{-1}(p - F(x_0)).$$

Assim, temos que x_1 é uma aproximação para a solução da equação (3.7). Na

tentativa de melhorar a aproximação obtida, podemos repetir este procedimento mas, desta vez, considerando o polinômio de Taylor de grau 1 de F em relação ao ponto x_1 e assim obter uma outra aproximação x_2 . Podemos repetir este processo diversas vezes com o objetivo de, a cada passo, obter uma aproximação melhor para a solução de (3.7).

Este processo é conhecido como *método de Newton*, introduzido por Isaac Newton no século XVII, e equivale a realizar as iterações

$$\begin{aligned} s_k &= J_F(x_k)^{-1} (p - F(x_k)) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde na linha (3.9) pode ser feita a resolução de um sistema linear para obter s_k ao invés de usar a inversa de $J_F(x_k)$.

A seguir enunciamos um teorema apresentando condições suficientes para que o método de Newton convirja para a solução do problema.

Teorema 3.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe $C^2(\Omega)$ e $\bar{x} \in \Omega$ tal que $F(\bar{x}) = p$ e $J_F(\bar{x})$ é não-singular. Então o método de Newton é localmente convergente, isto é, existe uma vizinhança B de \bar{x} tal que se $x_0 \in B$, então o método de Newton com estimativa inicial x_0 converge para \bar{x} .*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [28].

Nos casos em que $M \neq N$, $J_F(x_k)$ for não-inversível ou $J_F(x_k)$ for mal-condicionada, na linha (3.9) podemos usar a regularização de Tikhonov e assim temos as iterações dadas por

$$\begin{aligned} s_k &= (J_F(x_k)^T J_F(x_k) + \lambda_k I)^{-1} J_F(x_k)^T (p - F(x_k)) \\ x_{k+1} &= x_k + s_k \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde I é a matriz identidade $N \times N$ e os valores λ_k são positivos e conhecidos como *parâmetros de amortecimento*. A técnica que consiste em realizar estas iterações é conhecida como *método de Levenberg-Marquardt*. Este método é amplamente aplicado para resolver sistemas de equações não-lineares nos casos em que não é possível ou não é conveniente aplicar o método de Newton.

Para começar a iteração são necessários uma estimativa inicial x_0 apropriada para a solução de (5.14) e um fator de amortecimento inicial λ_0 . Os fatores de amortecimento podem ser atualizados a cada iteração tomando-se

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu \lambda_k, & \text{se } \|F(x_k) - p\| < \|F(x_{k-1}) - p\| \\ \lambda_k / \mu, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu\lambda_k, & \text{se } \|x_{k+1} - x_k\| < \|x_k - x_{k-1}\| \\ \lambda_k/\mu, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $0 < \mu < 1$.

Como critério de parada para as iterações podemos adotar um valor para o qual $\|F(x_k) - p\|$ ou $\|x_k - x_{k-1}\|$ deve ser menor e estabelecemos um valor máximo de iterações.

Capítulo 4

Problema Unidimensional

Neste capítulo apresentamos um estudo do caso unidimensional do problema de reconstrução de fontes difusivo-advectivas a partir de dados no bordo do domínio. Na Seção 4.1 tomamos uma mudança de variáveis para a equação de difusão-advecção e obtemos uma formulação variacional para o problema. Na Seção 4.2 foi considerado o conhecimento *a priori* de que a fonte é uma função característica de um intervalo desconhecido. Encontramos uma equação não-linear e aplicando o método de Newton desenvolvemos um método para aproximar a solução do problema. Na Seção 4.3 apresentamos simulações numéricas para testar o método e o testamos também para encontrar aproximações numéricas de fontes de suporte compacto.

4.1 Formulação Variacional

Sejam (x_1, x_2) um intervalo de \mathbb{R} e os coeficientes de decaimento, advecção e difusão dados por $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, respectivamente, de maneira que $\alpha \geq 0$ e $\gamma > 0$.

Apresentamos abaixo um problema associado a equação unidimensional de difusão-advecção.

Problema 4.1 *Dados os valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e a função $f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $u'(x_1)$ e $u'(x_2)$ tais que u satisfaça*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f & \text{em } (x_1, x_2) \\ u(x_1) = a_1, u(x_2) = a_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

A seguir apresentamos o problema inverso considerado neste capítulo.

Problema 4.2 *Dados os valores $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, encontre $f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f & \text{em } (x_1, x_2) \\ u(x_1) = a_1, u(x_2) = a_2 \\ u'(x_1) = b_1, u'(x_2) = b_2 \end{cases} .$$

Assim como foi visto na Seção 2.2, o Problema 4.2 não tem solução única. E, usando uma argumentação semelhante à apresentada na Seção 2.2, é possível mostrar que é suficiente estudarmos o próximo problema.

Problema 4.3 *Dados os valores $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, encontre $f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\gamma u'' + \beta u' + \alpha u = f & \text{em } (x_1, x_2) \\ u(x_1) = u(x_2) = 0 \\ u'(x_1) = b_1, \quad u'(x_2) = b_2 \end{cases} .$$

Fazendo uma mudança de variável, apresentaremos um problema inverso equivalente ao Problema 4.3 e, em seguida, uma formulação variacional para o novo problema.

Considerando

$$u(x) = e^{\frac{\beta}{2\gamma}x} w(x),$$

para todo $x \in \overline{(x_1, x_2)}$, temos

$$-\gamma u''(x) + \beta u'(x) + \alpha u(x) = e^{\frac{\beta}{2\gamma}x} \left(-\gamma w''(x) + \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \right) w(x) \right),$$

para todo $x \in (x_1, x_2)$.

Assim, denotando

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\alpha\gamma + \beta^2}{4\gamma^2}}, \quad (4.2)$$

$$d_1 = b_1 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_1} \quad \text{e} \quad d_2 = b_2 e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x_2}, \quad (4.3)$$

temos que o Problema 4.3 equivale ao problema seguinte.

Problema 4.4 *Dados κ, d_1 e d_2 como definidos em (4.2) e (4.3), encontre $f : (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -w''(x) + \kappa^2 w(x) = \frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x} & \forall x \in (x_1, x_2) \\ w(x_1) = w(x_2) = 0 \\ w'(x_1) = d_1, \quad w'(x_2) = d_2 \end{cases} .$$

Consideremos o espaço das funções testes definido por

$$V(x_1, x_2) = \{v \in H^2(x_1, x_2) \mid -v'' + \kappa^2 v = 0\}.$$

Suponhamos que $f \in L^2(x_1, x_2)$. Multiplicando $\frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x}$ por uma função de

$V(x_1, x_2)$ e integrando sobre (x_1, x_2) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x} v(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} (-w''(x) + \kappa^2 w(x)) v(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \kappa^2 w(x) v(x) - w''(x) v(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} w(x) v''(x) - w''(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Fazendo uma integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} w(x) v''(x) - w''(x) v(x) dx \\ &= w(x) v'(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v'(x) w'(x) dx - \left(v(x) w'(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v'(x) w'(x) dx \right) \\ &= w(x) v'(x) - v(x) w'(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= d_1 v(x_1) - d_2 v(x_2). \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$B(f, v) = \frac{1}{\gamma} \int_{x_1}^{x_2} f(x) v(x) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}x} dx, \quad (4.4)$$

para todo $v \in V(x_1, x_2)$, e

$$L(v) = d_1 v(x_1) - d_2 v(x_2), \quad (4.5)$$

para todo $v \in V(x_1, x_2)$, temos que se f é solução do Problema 5.1 então f é solução de problema seguinte.

Problema 4.5 Dados B e L como definidos em (4.4) e (4.5), encontre f tal que

$$B(f, v) = L(v), \quad (4.6)$$

para todo $v \in V(x_1, x_2)$.

Note que, definindo $v_1(x) = e^{\kappa x}$ e $v_2(x) = e^{-\kappa x}$, para todo $x \in (x_1, x_2)$, temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $V(x_1, x_2)$. Como $B(f, \cdot)$ e L são funcionais lineares com domínio $V(x_1, x_2)$, resolver o Problema 4.5 é equivalente a encontrar f que satisfaça o sistema

$$\begin{cases} B(f, v_1) = L(v_1) \\ B(f, v_2) = L(v_2) \end{cases}. \quad (4.7)$$

Se f é uma combinação linear de duas funções $f_1, f_2 \in L^2(x_1, x_2)$ conhecidas, isto é, se existem $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2$, então podemos obter f pelo sistema (4.7) se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} B(f_1, v_1) & B(f_2, v_1) \\ B(f_1, v_2) & B(f_2, v_2) \end{pmatrix} \neq 0.$$

4.2 Fontes Características de um Intervalo

Consideremos o Problema 4.3 com a informação *a priori* de que f é uma função característica de um intervalo $[\xi_1, \xi_2] \subset (x_1, x_2)$, isto é, que $f = \chi_{[\xi_1, \xi_2]}$, onde

$$\chi_{[\xi_1, \xi_2]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0, & \text{se } x \notin [\xi_1, \xi_2] \end{cases},$$

para todo $x \in (x_1, x_2)$, para algum par $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x_2)$ desconhecido. Vamos usar o sistema (4.7) para obter ξ_1 e ξ_2 e assim determinar f .

Note que,

$$\begin{aligned} B(f, v_1) &= \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)x} dx \\ &= \frac{1}{\gamma \left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)} \left(e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2} - e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(f, v_2) &= \frac{1}{\gamma} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)x} dx \\ &= \frac{1}{\gamma \left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)} \left(e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_2} - e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)\xi_1} \right), \end{aligned}$$

$$L(v_1) = d_1 e^{\kappa x_1} - d_2 e^{\kappa x_2}$$

e

$$L(v_2) = d_1 e^{-\kappa x_1} - d_2 e^{-\kappa x_2}.$$

Assim, definindo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(s, t) = \left(\frac{e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)t} - e^{\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{\gamma\kappa - \frac{\beta}{2}}, \frac{e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)t} - e^{\left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right)s}}{-\gamma\kappa - \frac{\beta}{2}} \right),$$

para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, e

$$(p_1, p_2) = (d_1 e^{\kappa x_1} - d_2 e^{\kappa x_2}, d_1 e^{-\kappa x_1} - d_2 e^{-\kappa x_2}),$$

resolver o sistema em (4.7) equivale a resolver a equação não-linear

$$F(s, t) = (p_1, p_2). \quad (4.8)$$

Para obter uma solução aproximada para (4.8), podemos usar o método de Newton apresentado na Seção 3.2, isto é, iterar

$$\begin{aligned} (q_k, r_k) &= J_F(s_k, t_k)^{-1} ((p_1, p_2) - F(s_k, t_k)) \\ (s_{k+1}, t_{k+1}) &= (s_k, t_k) + (q_k, r_k) \end{aligned}$$

onde

$$J_F(s, t) = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -e^{(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})s} & e^{(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})t} \\ -e^{(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})s} & e^{(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})t} \end{pmatrix}$$

é a matriz jacobiana de F no ponto (s, t) e com (s_0, t_0) adequado.

A aplicabilidade do método de Newton com uma estimativa inicial (s_0, t_0) adequada é assegurada pelo Teorema 3.1.

Note que F é de classe C^2 , pois suas funções-coordenadas são de classe C^2 . Supondo que $\det J_F(\xi_1, \xi_2) = 0$, obtemos

$$e^{(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})\xi_1 + (-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})\xi_2} = e^{(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})\xi_2 + (-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma})\xi_1}.$$

Pela injetividade da função exponencial, temos que

$$\left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \xi_1 + \left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \xi_2 = \left(\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \xi_2 + \left(-\kappa - \frac{\beta}{2\gamma}\right) \xi_1,$$

o que nos leva a $(\xi_2 - \xi_1) \frac{\beta}{2\gamma} = 0$. Como $\xi_1 \neq \xi_2$ e $\beta \neq 0$, temos uma contradição. Logo $\det J_F(\xi_1, \xi_2) \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 3.1, se tomarmos uma estimativa inicial (s_0, t_0) suficientemente próxima de (ξ_1, ξ_2) temos que o método de Newton converge para (ξ_1, ξ_2) .

4.3 Simulações Numéricas

As simulações apresentadas nesta seção foram implementados em Python, usando as bibliotecas Numpy, Scipy e PyLab.

4.3.1 Recuperando uma fonte característica de um intervalo

Nesta simulação testamos o método proposto para resolver o Problema 4.2 considerando o domínio $(0, 5)$, com parâmetros da equação dados por $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.50$ e $\gamma = 0.75$ e termo fonte $f = \chi_{[1,1.5]}$.

Para sintetizar os dados de entrada $u'(0)$ e $u'(5)$ da simulação resolvemos numericamente o problema seguinte.

Problema 4.6 *Encontre $u'(0)$ e $u'(5)$ de forma que u satisfaça*

$$\begin{cases} -0.75u'' + 0.50u' + 0.75u = \chi_{[1,1.5]} & \text{em } (0, 5) \\ u(0) = u(5) = 0 \end{cases} . \quad (4.9)$$

Discretizamos o domínio tomando 1002 pontos $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{1001} = 5$ tais que $x_i - x_{i-1} = h$, para todo $i = 1, 2, \dots, 1001$ e resolvemos o sistema (4.9) pelo método dos elementos finitos com elementos Lagrangeanos lineares. Na Figura 4.1, representado em verde e azul, respectivamente, temos a função u_h obtida e a fonte $\chi_{[1,1.5]}$.

Para obtermos dados aproximados para $u'(0)$ e $u'(5)$, fizemos

$$b_1 = \frac{u_h(x_1) - u_h(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{u_h(x_{1001}) - u_h(x_{1000})}{h},$$

resultando em $b_1 = 0.119387997616$ e $b_2 = -0.0417667576086$.

Para estimativa inicial tomamos $(s_0, t_0) = (0, 5)$ e como critério de parada para as iterações usamos $\|F(s_n, t_n) - (p_1, p_2)\| < 10^{-16}$. Foram realizadas 9 iterações e o método nos deu a solução aproximada

$$\bar{f} = \chi_{[1.00361424631, 1.50343624273]}$$

para o problema.

Na Tabela 4.1 podemos ver os dados obtidos em cada iteração.

Note que, como os dados de entrada foram produzidos pelo método dos elementos finitos, eles já estão acrescidos de erro e por isso o método não converge para a solução exata do problema. Repetindo o mesmo experimento usando uma discretização para o domínio com 5002 pontos igualmente espaçados, obtivemos a solução numérica

$$\bar{f} = \chi_{[1.00072369572, 1.50068774238]}$$

em 8 iterações. Isto é, melhorando a qualidade dos dados de entrada, obtemos uma solução numérica mais próxima da solução real.

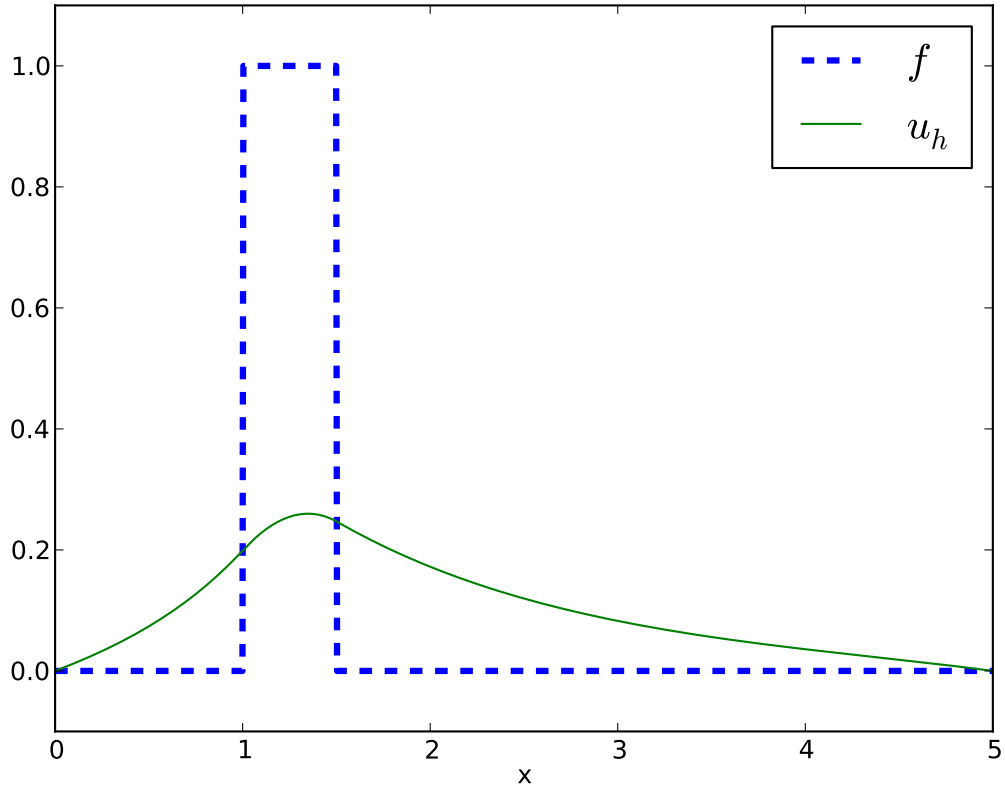


Figura 4.1: Gráficos de $\chi_{[1,1.5]}$ e de u_h obtida para esta fonte.

4.3.2 Obtendo aproximações para funções de suporte compacto

Nesta simulação visamos obter uma aproximação por fonte característica para uma fonte dada por uma função contínua positiva com suporte compacto. Para gerar dados de entrada para esta simulação, resolvemos pelo método de Galerkin o problema seguinte.

Problema 4.7 *Encontre $u'(0)$ e $u'(5)$ de forma que u satisfaça*

$$\begin{cases} -u'' - 0.75u' + 0.25u = f_1 & \text{em } (0, 5) \\ u(0) = u(5) = 0 \end{cases},$$

onde

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{11}{10}(x-2)(x-4) & , \quad \text{se } x \in (2, 4) \\ 0 & , \quad \text{se } x \notin (2, 4) \end{cases}, \quad (4.10)$$

para todo $x \in (0, 5)$.

n	s_n	t_n	$\ F(s_n, t_n) - (p_1, p_2)\ $
0	0.00000000000	5.00000000000	64.4624026182
1	0.629226733664	3.7012301835	22.0875169921
2	1.10992478833	2.60397962383	6.31463193126
3	1.23642080097	1.92215763709	1.22938016452
4	1.04721611961	1.57603904035	0.17198388291
5	1.00531697895	1.50600312076	0.00544303116
6	1.00361592274	1.5034390563	6.47980399233e-06
7	1.00361424632	1.50343624273	8.46333531145e-12
8	1.00361424631	1.50343624273	6.66278359382e-16
9	1.00361424631	1.50343624273	1.38777878078e-17

Tabela 4.1: Dados obtidos em cada iteração do método proposto.

Usamos a mesma discretização da simulação realizada na seção anterior e obtemos os dados de entrada $b_1 = 0.633236426522$ e $b_2 = -0.216290556828$.

Para estimativa inicial tomamos $(s_0, t_0) = (0, 5)$ e como critério de parada para as iterações usamos $\|F(s_n, t_n) - (p_1, p_2)\| < 10^{-14}$. Foram realizadas 7 iterações e o método nos forneceu a fonte

$$\overline{f_1} = \chi_{[2.2807889677, 3.74992747306]}.$$

Na Figura 4.2 podemos ver os gráficos da função f proposta, da u_h obtida pelo método de Galerkin e da $\overline{f_1}$. Como podemos ver, a função obtida com o método é uma boa aproximação para a fonte proposta.

Fizemos um outro experimento com os mesmos parâmetros, mudando apenas o termo fonte para

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}(x^2 - 5x) & , \quad \text{se } x \in (3, 4) \\ 0 & , \quad \text{se } x \notin (3, 4) \end{cases}, \quad (4.11)$$

para todo $x \in (0, 5)$. Obtivemos os dados de entrada $b_1 = 0.367865777374$ e $b_2 = -0.231659435709$.

Com estimativa inicial e critério de parada iguais aos da simulação anterior, foram realizadas 5 iterações e o método nos forneceu a fonte

$$\overline{f_2} = \chi_{[2.95700431511, 3.98878814006]}.$$

Na Figura 4.3 podemos ver os gráficos da função f_2 proposta, da u_h obtida pelo método de Galerkin e da $\overline{f_2}$. Novamente o método nos deu uma boa aproximação para o termo fonte proposto.

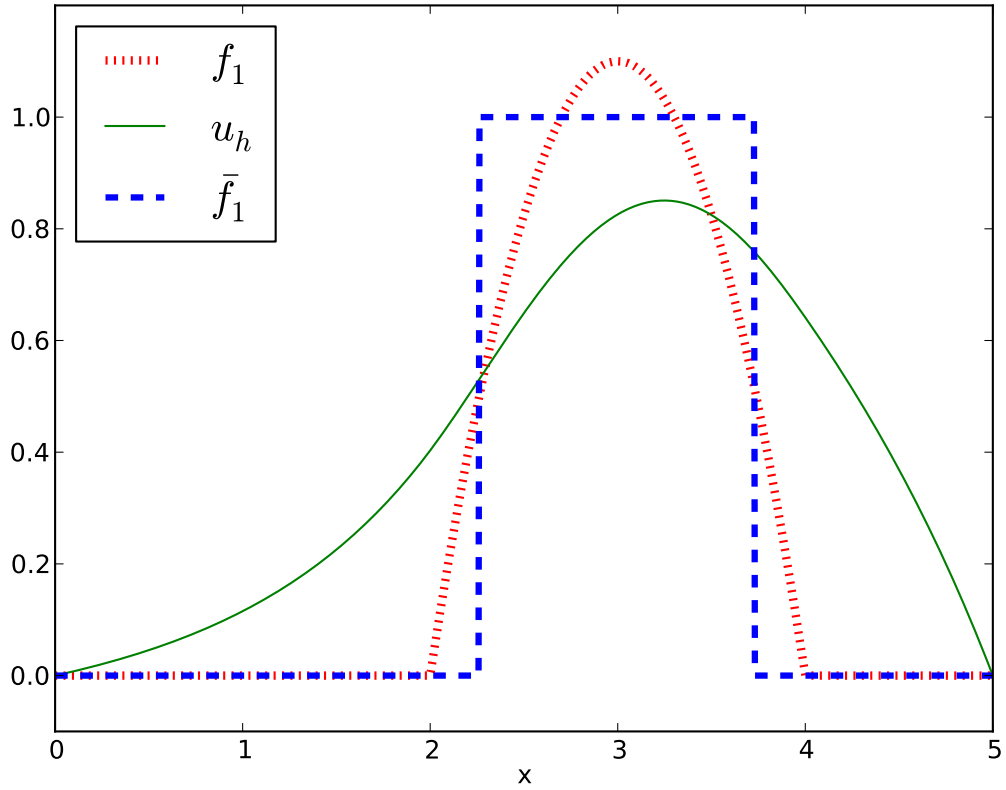


Figura 4.2: Gráficos de f_1 descrita em (4.10), de u_h obtida com esta fonte e da aproximação \bar{f}_1 .

As simulações apresentadas nesta seção nos levam a crer que as aproximações obtidas utilizando este método visam aproximar a fonte procurada por uma função característica de um intervalo e de mesma integral. Pois, para a primeira simulação, obtemos

$$\int_0^5 \bar{f}_1(x) dx \approx 1.469139,$$

enquanto para a fonte verdadeira, temos

$$\int_0^5 f_1(x) dx \approx 1.466667.$$

Para a segunda simulação, obtemos

$$\int_0^5 \bar{f}_2(x) dx \approx 1.031784,$$

enquanto para a fonte verdadeira, temos

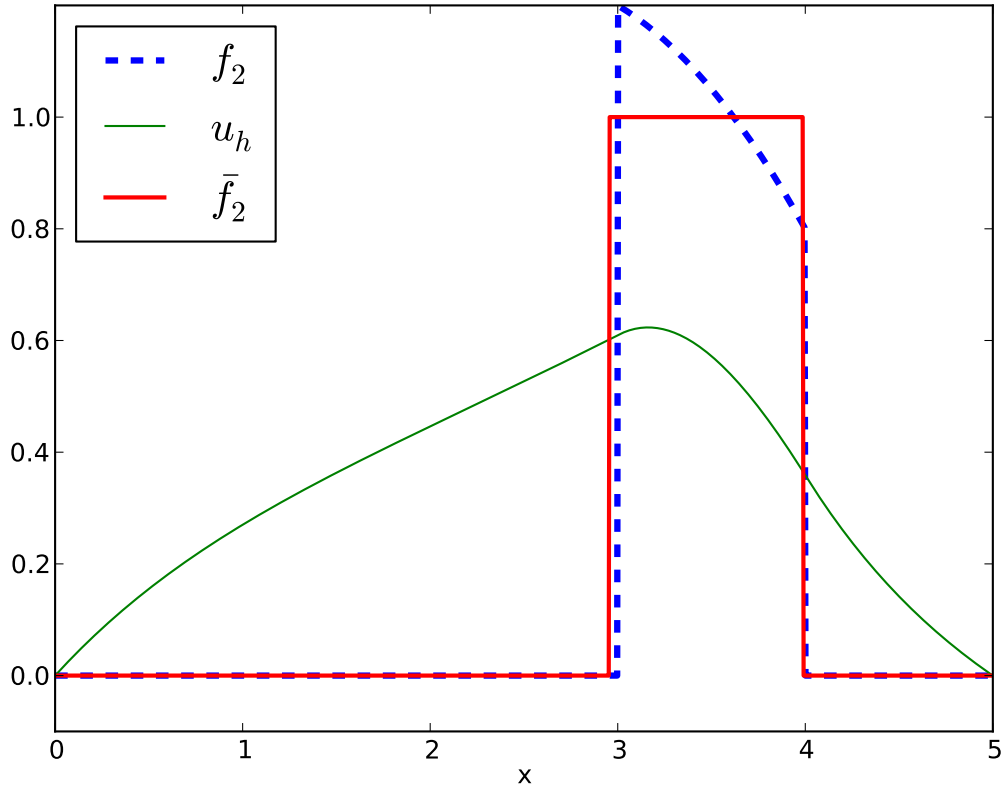


Figura 4.3: Gráficos de f_2 descrita em (4.11), de u_h obtida com esta fonte e da aproximação \bar{f}_2 .

$$\int_0^5 f_2(x) dx \approx 1.033333.$$

Capítulo 5

Problema Bidimensional

Neste capítulo voltamos ao caso bidimensional do problema de reconstrução de fontes difusivo-advectivas a partir de dados no bordo do domínio. Os procedimentos adotados neste capítulo são similares aos que foram feitos no Capítulo 4 para o caso unidimensional. Na Seção 5.1 tomamos uma mudança de variáveis para a equação de difusão-advectação e obtemos uma formulação variacional para o problema. Na Seção 5.2 foi considerado o conhecimento *a priori* de que a fonte é uma função característica de um conjunto convexo desconhecido. Encontramos uma equação não-linear e aplicando o método de Levenberg-Marquardt desenvolvemos um método para aproximar a solução do problema. Na Seção 5.3 apresentamos simulações numéricas para testar o método e o testamos também para encontrar aproximações numéricas de fontes características de um conjunto estrelado. Neste último experimento apresentamos um indício de que o problema não tem unicidade de solução se considerarmos a classe dos conjuntos estrelados.

5.1 Formulação Variacional

O Problema 2.5 pode ser transformado em um problema inverso de identificação de fonte para a equação de Helmholtz modificada introduzindo a mudança de variável

$$u(x) = e^{\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} w(x), \quad (5.1)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Pois, dessa forma, temos

$$-\gamma \Delta u(x) + \beta \cdot \nabla u(x) + \alpha u(x) = e^{\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} \left(-\gamma \Delta w(x) + \left(\alpha + \frac{\|\beta\|^2}{4\gamma} \right) w(x) \right),$$

para todo $x \in \Omega$.

Assim, definindo

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\alpha\gamma + \|\beta\|^2}{4\gamma^2}}, \quad (5.2)$$

e

$$h_{\mathbf{n}}(x) = g_{\mathbf{n}}(x)e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x}, \quad (5.3)$$

para todo $x \in \partial\Omega$, temos que o Problema 2.5 é equivalente ao problema seguinte.

Problema 5.1 *Dadas a constante κ e a condição de Neumann $h_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como definidos em (5.2) e (5.3), encontre $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta w(x) + \kappa^2 w(x) = \frac{1}{\gamma} f(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x}, & \forall x \in \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} w = h_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

Consideremos o espaço de funções testes definido por

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \mid -\Delta v + \kappa^2 v = 0\}$$

e f solução do Problema 5.1. Multiplicando o termo fonte do Problema 5.1 por uma função de $\mathcal{V}(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v(x) dx &= \int_{\Omega} (-\Delta w(x) + \kappa^2 w(x)) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} w(x) \Delta v(x) - \Delta w(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Pela segunda identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v(x) dx &= \int_{\partial\Omega} w \partial_{\mathbf{n}} v - \partial_{\mathbf{n}} w v d\ell \\ &= - \int_{\partial\Omega} h_{\mathbf{n}} v d\ell. \end{aligned}$$

Assim, se f é solução do Problema 5.1, temos que f é também solução do problema variacional apresentado a seguir.

Problema 5.2 *Dado $h_{\mathbf{n}}$ como definido anteriormente, encontre f tal que*

$$\frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v(x) dx = - \int_{\partial\Omega} h_{\mathbf{n}} v d\ell, \quad (5.4)$$

para todo $v \in \mathcal{V}(\Omega)$.

A igualdade em (5.4) relaciona o termo fonte com os dados de Neumann do problema. Ela é bastante explorada em trabalhos de identificação de fontes, tais como [14, 22, 29, 30].

Observação 5.1 *Seja $\mathcal{S}(\Omega)$ um subspaço de $L^2(\Omega)$ o qual buscaremos soluções para o Problema 5.2. Definindo*

$$B(f, v) = \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} f(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v(x) dx,$$

para todo par $(f, v) \in \mathcal{S}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$, e

$$L(v) = - \int_{\Gamma} h_{\mathbf{n}} v d\ell,$$

para todo $v \in \mathcal{V}(\Omega)$, temos que B é uma forma bilinear e L um funcional linear. Note que, se \bar{f} é solução do Problema 5.2, temos que

$$B(\bar{f}, v) = L(v),$$

para todo $v \in \mathcal{V}(\Omega)$.

Como foi visto na Seção 2.2, não podemos ter $\mathcal{S}(\Omega) = L^2(\Omega)$, pois não teremos unicidade de solução. Este fato nos motiva a procurar algum $\mathcal{S}(\Omega)$ de forma que possamos aplicar o teorema a seguir para garantir existência e estabilidade das soluções do Problema 5.2.

Teorema 5.1 *Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ espaços de Hilbert sobre \mathbb{R} . Se $B : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é bilinear e $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e contínuo, então (i) \iff (ii), onde*

(i) 1. existe um, e somente um, $u \in U$ tal que

$$B(u, v) = L(v),$$

para todo $v \in V$;

2. existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_U \leq C \|L\|_{V'},$$

para todo $L \in V'$;

(ii) 1. existe $C_1 > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_U \|v\|_V,$$

para todo $u \in U$ e para todo $v \in V$;

2. existe $C_2 > 0$ tal que

$$\inf_{u \in U, u \neq 0_U} \left(\sup_{v \in V, v \neq 0_V} \frac{B(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \right) \geq C_2;$$

3. se $B(u, v) = 0$, para todo $u \in U$, então $v = 0_V$.

O Teorema 5.1 é referido como Teorema de Banach-Necas-Babuska em [31], onde ele é enunciado e provado considerando U um espaço de Banach e V um espaço de Banach reflexivo. Normalmente este teorema é usado para provar boa colocação de problemas diretos em EDP e de problemas aproximados pelo método de Galerkin.

5.2 Fontes Características de um Conjunto Convexo

Dizemos que um conjunto $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é *estrelado* com respeito a um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ se para todo $x \in \omega$ o seguimento de reta que liga x_0 a x está contido em ω . Neste caso dizemos que x_0 é o *centro* de ω . Na Figura 5.1 temos um exemplo de conjunto estrelado.

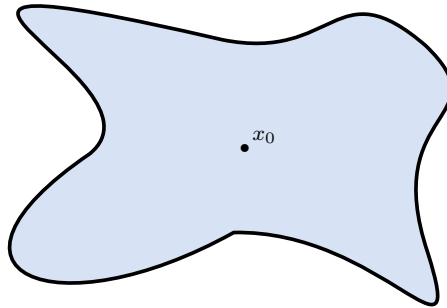


Figura 5.1: Um exemplo de conjunto estrelado. O centro deste conjunto é o ponto x_0 .

Se ω é um conjunto estrelado fechado com bordo contínuo, podemos representar seu bordo da forma

$$x_0 + R(\theta) (\cos \theta, \sin \theta), \quad (5.5)$$

onde $R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e $R(0) = R(2\pi)$. Na verdade, todo ponto de ω pode ser representado na forma

$$x_0 + r (\cos \theta, \sin \theta), \quad (5.6)$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \geq 0$.

Dizemos que um conjunto $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é *convexo* se para todo $x, y \in \omega$ o seguimento de reta que liga x a y está contido em ω . Na Figura 5.2 temos um exemplo de conjunto convexo. O interior de uma elipse ou de qualquer polígono regular também são exemplos de conjuntos convexos. Note que se ω é convexo, então ω é também estrelado com respeito a qualquer ponto de ω .

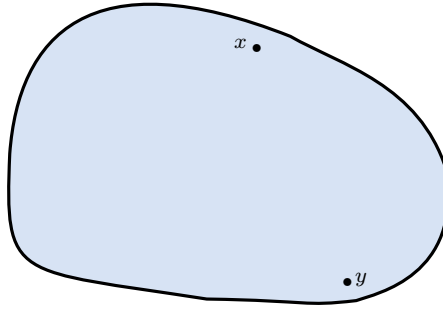


Figura 5.2: Um exemplo de conjunto convexo.

Vamos considerar o Problema 2.5 supondo que temos a informação *a priori* de que o termo fonte f é a função característica de um conjunto convexo fechado $\omega \subset \Omega$. Assim, o problema considerado é

Problema 5.3 Dada a condição de Neumann $g_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre o termo fonte $\chi_{\omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = \chi_{\omega} & em \ \Omega \\ u = 0 & em \ \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}}u = g_{\mathbf{n}} & em \ \partial\Omega \end{cases},$$

onde χ_{ω} é definida em (2.10).

Note que, se obtermos o ponto x_0 e a função R descritos em (5.5), o Problema 5.3 está resolvido, pois com estes parâmetros é possível descrever ω e assim obtermos χ_{ω} .

Como vimos anteriormente, aplicando-se a mudança de variável (5.1), obtemos

Problema 5.4 Dadas a constante κ e a condição de Neumann $h_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como definidos em (5.2) e (5.3), encontre $\chi_{\omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta w(x) + \kappa^2 w(x) = \frac{1}{\gamma} \chi_{\omega}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x}, & \forall x \in \Omega \\ w = 0 & em \ \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} w = h_{\mathbf{n}} & em \ \partial\Omega \end{cases}.$$

Observação 5.2 Em [32] foi considerado o problema seguinte.

Problema 5.5 Dadas $f, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g, g_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $\omega \subset \Omega$ aberto tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + h^2 u = f \chi_{\omega}, & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases},$$

sabendo que $f(x) > 0$, para todo $x \in \omega$.

E apresentado o resultado seguinte.

Teorema 5.2 Sejam $h \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ e $g_{\mathbf{n}} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Se ω_1 e ω_2 são soluções do Problema 5.5 com bordos de classe C^2 tais que $\omega_1 \cap \omega_2$, $\omega_1 \setminus \omega_2$ e $\omega_2 \setminus \omega_1$ são simplesmente conexos, então $\omega_1 = \omega_2$.

Note que este teorema não garante a unicidade das soluções do Problema 5.1 para nenhuma classe fixada para ω .

Consideremos as funções $v_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ conhecidas como *ondas planas* dadas por

$$v_\varphi(x) = e^{\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$, onde $\varphi \in [0, 2\pi)$ e a constante κ como definida anteriormente. Note que, restringindo o domínio de v_φ a Ω , temos $v_\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$.

A primeira integral na equação (5.4) é

$$\frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x} v_\varphi(x) dx = \frac{1}{\gamma} \int_{\omega} e^{(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma} \beta) \cdot x} dx.$$

Seja x_0 um ponto de ω . Podemos tomar x_0 como centro de ω e, considerando as parametrizações (5.5) e (5.6), fazer a mudança de variáveis $x = x_0 + r(\cos \theta, \sin \theta)$, tendo assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x} v_\varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} e^{(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma} \beta) \cdot (x_0 + r(\cos \theta, \sin \theta))} r dr d\theta \\ &= \frac{e^{(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma} \beta) \cdot x_0}}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} e^{r(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma} \beta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Tomando-se $\psi \in [0, 2\pi)$ tal que $\beta = \|\beta\|(\cos \psi, \sin \psi)$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v_{\varphi}(x) dx \\ &= \frac{e^{(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma}\beta) \cdot x_0}}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} e^{r(\kappa \cos(\theta - \varphi) - \frac{\|\beta\|}{2\gamma} \cos(\theta - \psi))} r dr d\theta \\ &= \frac{C(\varphi, x_0)}{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{R(\theta)L(\varphi, \theta)} (R(\theta)L(\varphi, \theta) - 1)}{L(\varphi, \theta)^2} d\theta, \end{aligned}$$

onde estamos denotando

$$L(\varphi, \theta) = \kappa \cos(\theta - \varphi) - \frac{\|\beta\|}{2\gamma} \cos(\theta - \psi),$$

para todo par $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi]$, e

$$C(\varphi, \zeta) = e^{(\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) - \frac{1}{2\gamma}\beta) \cdot \zeta},$$

para todo par $(\varphi, \zeta) \in [0, 2\pi) \times \Omega$, na última integral.

A segunda integral na equação (5.4) pode ser calculada com o dado de Neumann fornecido no problema. Denotamos

$$P(\varphi) = - \int_{\Gamma} v_{\varphi} h_{\mathbf{n}} dl, \quad (5.7)$$

para $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Assim, nosso problema agora consiste em encontrar o ponto x_0 e a função R que satisfaçam a equação integral não-linear

$$\frac{C(\varphi, x_0)}{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{R(\theta)L(\varphi, \theta)} (R(\theta)L(\varphi, \theta) - 1)}{L(\varphi, \theta)^2} d\theta = P(\varphi), \quad (5.8)$$

para todo $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vamos procurar uma solução aproximada para a equação (5.8) discretizando as variáveis φ e θ . Sejam $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{M+1}\}$ uma partição igualmente espaçada do intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_{M+1} = 2\pi$ e $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ uma outra partição de $[0, 2\pi]$ tal que $\theta_1 = 0$ e $\theta_N = 2\pi$.

Usamos a notação

$$R(\theta_j) = \xi_j,$$

$$L(\varphi_i, \theta_j) = L_{ij}, \quad (5.9)$$

$$C(\varphi_i, \zeta) = C_i(\zeta) \quad (5.10)$$

e

$$P(\varphi_i) = p_i, \quad (5.11)$$

para $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N$, e

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M) \quad (5.12)$$

e

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N).$$

Para aproximar o lado esquerdo da equação (5.8) quando $\varphi = \varphi_i$, definimos as funções $F_i : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_i(\zeta, \xi) = \frac{1}{\gamma} C_i(\zeta) \sum_{j=1}^N w_j \frac{1 + e^{L_{ij}\xi_j} (L_{ij}\xi_j - 1)}{L_{ij}^2}, \quad (5.13)$$

para $1 \leq i \leq M$, onde w_1, w_2, \dots, w_N são os pesos da regra de quadratura adotada para a integral, e a função $\mathbf{F} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ por

$$\mathbf{F}(\zeta, \xi) = (F_1(\zeta, \xi), F_2(\zeta, \xi), \dots, F_M(\zeta, \xi)),$$

para todo $(\zeta, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$. Assim, para obter a solução desejada devemos resolver a equação não-linear

$$\mathbf{F}(\zeta, \xi) = \mathbf{p}. \quad (5.14)$$

O método de Newton não é indicado para este caso, porque a matriz Jacobiana de \mathbf{F} é $M \times N + 2$ e podemos ter $M \neq N + 2$, então usamos o método de Levenberg-Marquardt, dado pelas iterações

$$\begin{aligned} (r^k, \mathbf{s}^k) &= (J_{\mathbf{F}}(\zeta^k, \xi^k)^T J_{\mathbf{F}}(\zeta^k, \xi^k) + \lambda_k I)^{-1} J_{\mathbf{F}}(\zeta^k, \xi^k)^T (\mathbf{p} - \mathbf{F}(\zeta^k, \xi^k)) \\ (\zeta^{k+1}, \xi^{k+1}) &= (\zeta^k, \xi^k) + (r^k, \mathbf{s}^k) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde I é a matriz identidade de ordem $N + 2$, λ_k é o fator de amortecimento na k -ésima iteração e $J_{\mathbf{F}}(\zeta, \xi)$ é a matriz Jacobiana de \mathbf{F} em (ζ, ξ) , cujo elemento ij é dado por

$$[J_{\mathbf{F}}(\zeta, \xi)]_{ij} = \begin{cases} \left(\kappa \cos \varphi_i - \frac{\|\beta\| \cos \psi}{2\gamma} \right) \frac{g_i(\zeta)}{\gamma} \sum_{k=1}^N w_k \frac{1 + e^{L_{ik}\xi_k} (L_{ik}\xi_k - 1)}{L_{ik}^2}, & \text{se } j = 1 \\ \left(\kappa \sin \varphi_i - \frac{\|\beta\| \sin \psi}{2\gamma} \right) \frac{g_i(\zeta)}{\gamma} \sum_{k=1}^N w_k \frac{1 + e^{L_{ik}\xi_k} (L_{ik}\xi_k - 1)}{L_{ik}^2}, & \text{se } j = 2 \\ \frac{g_i(\zeta)}{\gamma} w_j \xi_j e^{L_{ij}\xi_j}, & \text{se } j \geq 3 \end{cases},$$

para $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N + 2$. O método de Levenberg-Marquardt está bem apresentado em [21] e em [33].

Observação 5.3 *Podemos considerar o problema de reconstrução de fontes para a equação de difusão-advecção para o caso onde a fonte procurada é formado por K fontes pontuais localizadas em $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^K \in \Omega$ e com intensidades $c_1, c_2, \dots, c_K > 0$. Assim, a fonte considerada é da forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^K c_i \delta(x - x_0^i),$$

onde δ é a função delta de Dirac.

É possível obter uma equação não-linear multiplicando o termo fonte do Problema 5.1 pela solução fundamental da equação modificada de Helmholtz e integrando sobre seu domínio. Este problema foi estudado em [9] usando o Método de Elementos de Contorno.

5.3 Simulações Numéricas

Todas as simulações apresentadas nesta seção foram feitas usando o COMSOL Multiphysics 3.5a integrado com o MATLAB 7.8.0. O principal objetivo delas é exemplificar o método apresentado, por isso os coeficientes adotados não representam problemas físicos.

5.3.1 Recuperando uma fonte característica de um conjunto convexo

Consideramos o Problema 2.5, sendo Ω a bola unitária com centro na origem e com parâmetros $\alpha = 0.5$, $\beta = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ e $\gamma = 1$ para a equação. O termo fonte investigado foi a função característica χ_ω , onde ω é a parte interna da região delimitada pela elipse de equação paramétrica

$$\begin{cases} x = 0.50 + \frac{\sqrt{2}}{2} (0.4 \cos \theta - 0.2 \sin \theta) \\ y = 0.25 + \frac{\sqrt{2}}{2} (0.4 \cos \theta + 0.2 \sin \theta) \end{cases},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$, o que representa a elipse com semi-eixos 0.4 e 0.2 e centro em $(0.50, 0.25)$, rodada de $\frac{\pi}{2}$ rad no sentido trigonométrico e em relação ao seu centro.

Para gerar dados para esta simulação resolvemos numericamente o problema seguinte.

Problema 5.6 Dado ω como descrito acima, encontre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \nabla u + 0.5u = \chi_\omega & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Foi utilizado o método de Galerkin com elementos Lagrangeanos quadráticos, com uma malha de 1617 elementos, sendo 129 elementos de bordo. Na Figura 5.3, temos a solução numérica para u obtida.

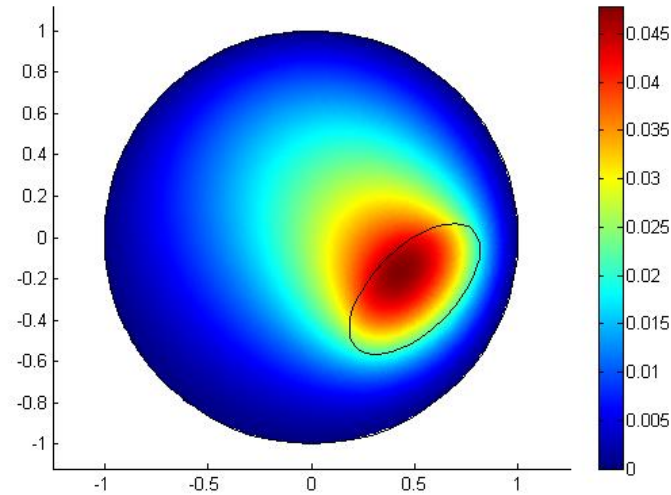


Figura 5.3: Solução numérica para o Problema 5.6.

Depois de encontrar u numericamente, utilizamos a fórmula

$$\partial_{\mathbf{n}}u(x) = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x)$$

em 500 pontos igualmente espaçados sobre $\partial\Omega$, para usarmos como dados de entrada para o problema inverso.

Fizemos quatro simulações numéricas com estes dados. A primeira usando os dados obtidos numericamente para o problema sem adicionar ruído e os outros três adicionando ruído consistindo de uma distribuição normal com desvios padrão de 2%, 4% e 7%. Na Figura 5.4, apresentamos os dados de entrada com e sem ruído usados nos experimentos.

Utilizamos 100 pontos de colocação para a variável φ e 400 pontos para a variável θ . Aplicamos a regra do trapézio para a quadratura na integral de (5.13), isto é,

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } j = 1 \text{ ou } j = M \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

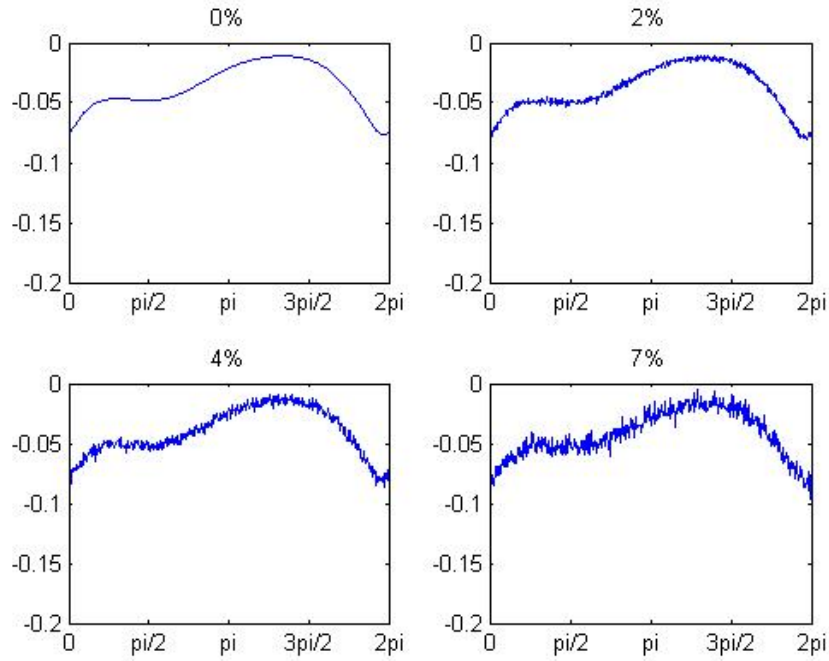


Figura 5.4: Aproximação para $\partial_n u$ obtida numericamente com e sem ruído.

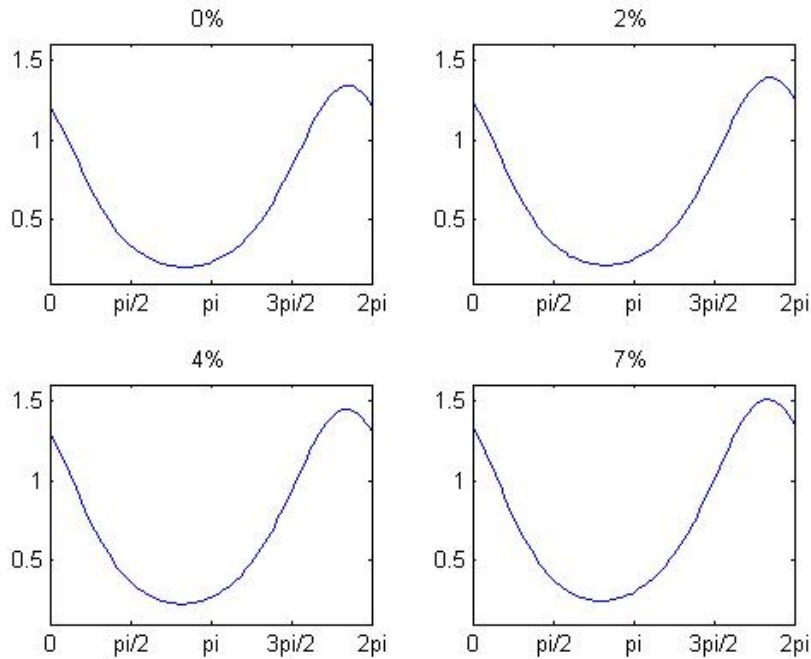


Figura 5.5: Vetor \mathbf{p} obtido numericamente com e sem ruído.

A estimativa inicial (ζ^0, ξ^0) utilizada nas quatro simulações foi tal que $\zeta^0 = (0, 0)$ e ξ^0 tem todas as entradas iguais a 0.1, o que representa uma circunferência de raio 0.1 centrada na origem, como mostrada em verde nas Figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9. O

critério de parada adotado foi $\|(\zeta^k, \xi^k) - (\zeta^{k-1}, \xi^{k-1})\| < 10^{-3}$, limitando o número de iterações em 1000. Além disso, adotamos os parâmetros $\lambda_0 = 1.7$ e $\mu = 0.5$ para iniciar as iterações do método de Levenberg-Marquardt.

Nas Figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, apresentamos em vermelho, para cada nível de ruído, os resultados obtidos usando o método apresentado e, em azul, a solução exata.

Note que, mesmo no caso onde o ruído acrescentado foi de 7%, o método nos deu uma boa solução aproximada para o problema.

Na Tabela 5.1, apresentamos o número de iterações, os vetores encontrados para ζ^k e seus respectivos valores para λ_k obtidos para cada nível de ruído.

ruído	iterações (k)	ζ^k	λ_k
0%	70	(0.479158, -0.251310)	0.026562
2%	109	(0.462087, -0.263168)	0.053125
4%	115	(0.441397, -0.279112)	0.053125
7%	835	(0.353213, -0.034573)	0.053125

Tabela 5.1: Quantidade de iterações, os vetores encontrados para ζ^k e seus respectivos valores para λ_k obtidos em para nível de ruído.

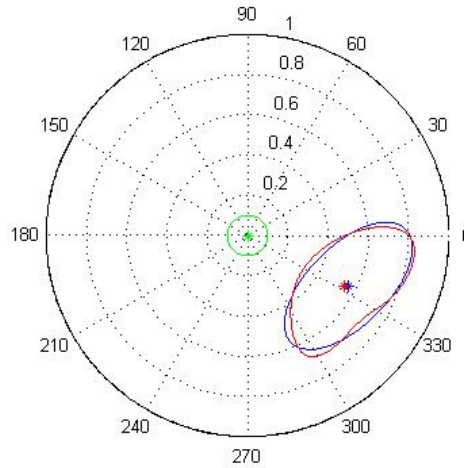


Figura 5.6: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho.

Observe que a reconstrução obtida na simulação sem acréscimo de ruído foi muito boa e as reconstruções nos demais simulações foram satisfatórias. Isto ocorre porque o ruído acrescentado em $\partial_{\mathbf{n}}u$ é suavizado pela integração feita em (5.7) para obter o vetor \mathbf{p} . Assim, o vetor \mathbf{p} obtido após o acréscimo de ruído não é muito diferente quando o ruído não é acrescentado, como podemos conferir na Figura 5.5.

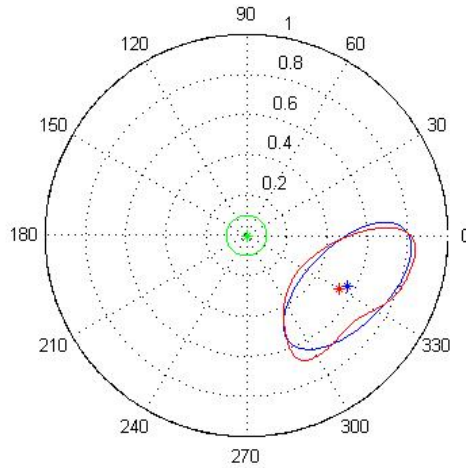


Figura 5.7: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 5%.

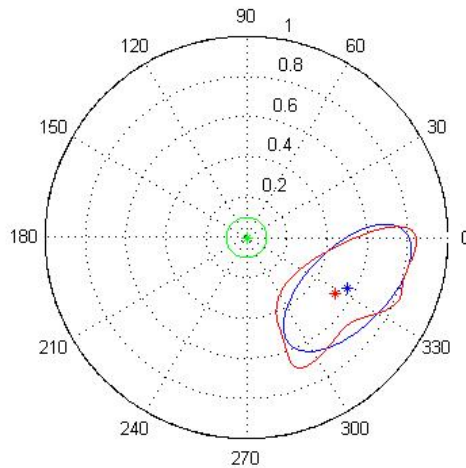


Figura 5.8: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 10%.

A escolha do fator de amortecimento λ_0 pode influenciar na qualidade da aproximação e na quantidade de iterações. Por exemplo, para $\lambda_0 = 0.5$ e com os mesmos parâmetros que nas outras simulações, mas sem acréscimo de ruído nos dados de entrada, o método não funciona, pois para $k = 12$, a matriz $J_{\mathbf{F}}(\zeta^k, \xi^k)^T J_{\mathbf{F}}(\zeta^k, \xi^k) + \lambda_k I$ é mal-condicionada e assim a iteração em (5.15) não pode ser feita. Já para $\lambda_0 = 2.0$, obtemos o resultado da Figura 5.10, o que representa uma resposta muito pior para um λ_0 tão próximo do que foi utilizado na Figura 5.6.

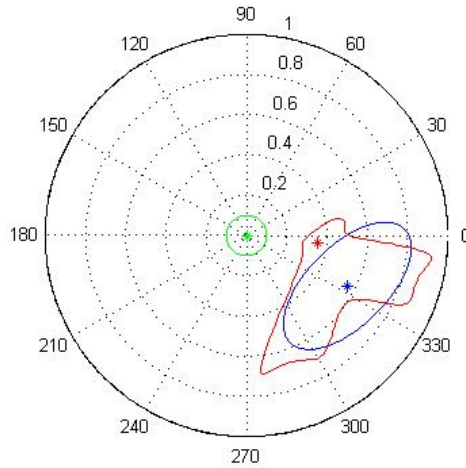


Figura 5.9: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 30%.

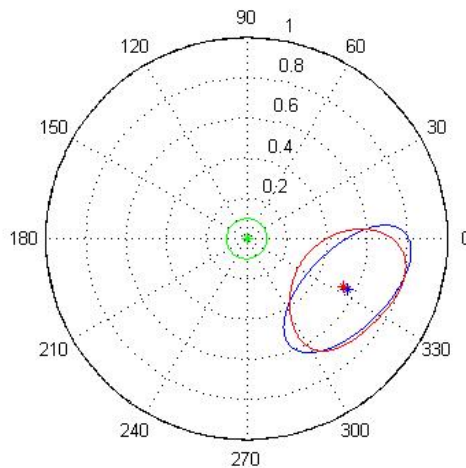


Figura 5.10: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi usado $\lambda_0 = 2$ sem acréscimo de ruído nos dados de entrada.

5.3.2 Recuperando uma fonte característica de um conjunto estrelado

Consideramos o Problema 2.5, sendo Ω a bola unitária com centro na origem e com parâmetros $\alpha = 1$, $\beta = 2(\cos \pi, \sin \pi)$ e $\gamma = 1.5$ para a equação. O termo fonte investigado foi a função característica χ_ω , onde ω é a união da parte interna da

região delimitada pelas elipses de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -0.5 + 0.2 \cos \theta \\ y = 0.3 + 0.1 \sin \theta \end{cases},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$, e

$$\begin{cases} x = -0.5 + 0.1 \cos \theta \\ y = 0.3 + 0.3 \sin \theta \end{cases},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$. A primeira equação representa a elipse com semi-eixos 0.2 e 0.1 e centro em $(-0.5, 0.3)$ e a segunda equação representa a elipse com semi-eixos 0.1 e 0.3 e mesmo centro.

Obtivemos uma aproximação para u resolvendo numericamente o problema seguinte.

Problema 5.7 *Dado ω como descrito acima, encontre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} -1.5\Delta u + 2(\cos \pi, \sin \pi) \cdot \nabla u + u = \chi_\omega & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Para isso usamos o método de Galerkin com elementos Lagrangeanos quadráticos, com uma malha de 859 elementos, sendo 73 elementos de bordo. A Figura 5.11 mostra a aproximação obtida.

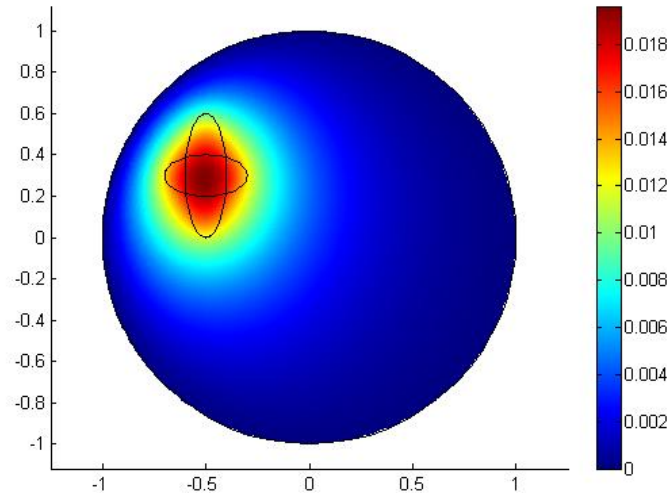


Figura 5.11: Aproximação para a solução do Problema 5.7 pelo método de Galerkin.

A partir desta aproximação encontrada para u , utilizamos a fórmula

$$\partial_{\mathbf{n}}u(x) = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x)$$

em 500 pontos igualmente espaçados sobre $\partial\Omega$ para obter uma aproximação para $\partial_{\mathbf{n}}u$.

Fizemos quatro simulações numéricas com estes dados. A primeira usando os dados obtidos numericamente para o problema sem adicionar ruído e os outros três adicionando ruído consistindo de uma distribuição normal com desvios padrão de 1%, 5% e 8%. Na Figura 5.12, apresentamos os dados de entrada com e sem ruído usados nos experimentos.

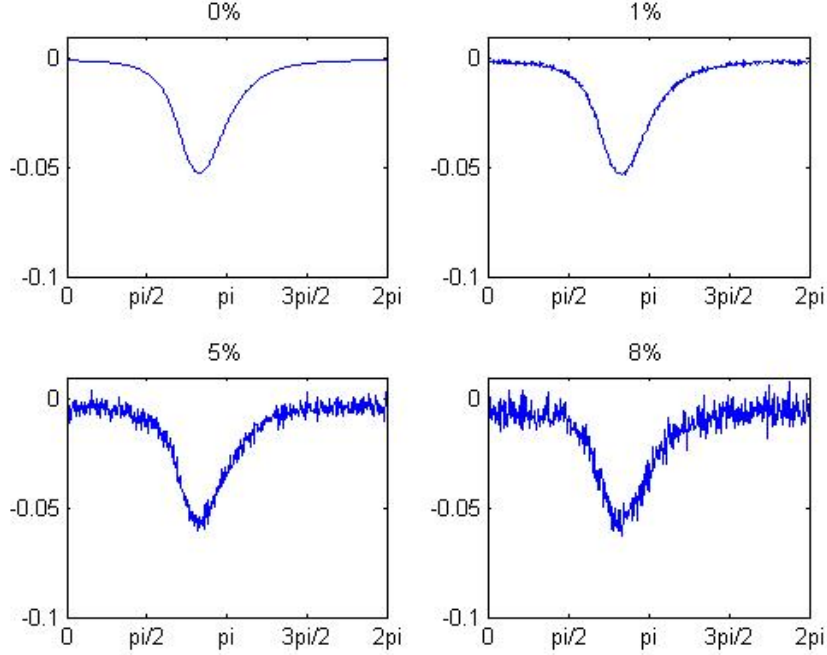


Figura 5.12: Aproximação para $\partial_{\mathbf{n}}u$ obtida numericamente com e sem ruído.

Utilizamos 50 pontos de colocação para a variável φ e 600 pontos para a variável θ . Aplicamos a Regra do Trapézio para a quadratura na integral de (5.13).

A estimativa inicial (ζ^0, ξ^0) utilizada nas quatro simulações foi tal que $\zeta^0 = (0, 0)$ e ξ^0 tem todas as entradas iguais a 0.1, o que representa uma circunferência de raio 0.1 centrada na origem, como mostrada em verde nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17. O critério de parada adotado foi $\|(\zeta^k, \xi^k) - (\zeta^{k-1}, \xi^{k-1})\| < 10^{-3}$, limitando o número de iterações em 1000. Além disso, adotamos os parâmetros $\lambda_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ e $\mu = 0.5$ para iniciar as iterações do método de Levenberg-Marquardt.

Nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17, apresentamos em vermelho, para cada nível de ruído, os resultados obtidos usando o método apresentado e, em azul, a solução exata.

Na Tabela 5.2, apresentamos o número de iterações, os vetores encontrados para ζ^k e seus respectivos valores para $\|(\zeta^k, \xi^k) - (\zeta^{k-1}, \xi^{k-1})\|$ para cada nível de ruído.

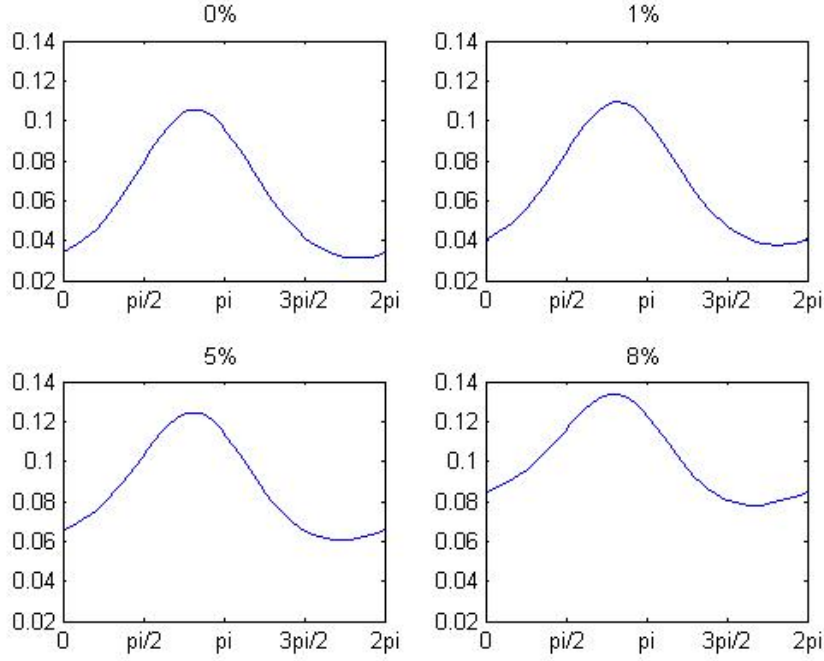


Figura 5.13: Vetor \mathbf{p} obtido numericamente com e sem ruído.

ruído	iterações (k)	ζ^k	λ_k
0%	255	$(-0.498974, 0.299299)$	1.25×10^{-4}
1%	191	$(-0.471071, 0.289623)$	1.25×10^{-4}
5%	196	$(-0.428709, 0.273853)$	2.5×10^{-4}
8%	50	$(-0.372054, 0.249014)$	2.5×10^{-4}

Tabela 5.2: Quantidade de iterações, os vetores encontrados para ζ^k e seus respectivos valores para λ_k obtidos para cada nível de ruído.

Nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 podemos constatar que nesta simulação o algoritmo nos deu como resposta um convexo próximo a ω em relação a localização e dimensão do conjunto. Porém o bordo do conjunto obtido não é tão próximo ao bordo de ω , o que nos leva a questionar se é possível desenvolver um algoritmo que nos dê uma aproximação melhor que esta. Provavelmente, não. Vejamos um fato que evidencia esta afirmação.

Consideramos o Problema 2.5, com os mesmos coeficientes de difusão, advecção e decaimento utilizados nesta seção e com termo fonte χ_{ω^*} , onde ω^* é a elipse de semi-eixos 0.146492 e 0.256692 com centro em $(-0.5, 0.3)$. Estes valores foram escolhidos visando aproximar a fonte deste problema a fonte obtida na última simulação.

Obtivemos uma nova aproximação para u desta vez com a nova fonte χ_{ω^*} . Nas Figuras 5.18 e 5.19 temos o gráfico de curvas de nível das aproximações para u obtidas para as fontes χ_{ω} e χ_{ω^*} , respectivamente. As aproximações para u obtidas

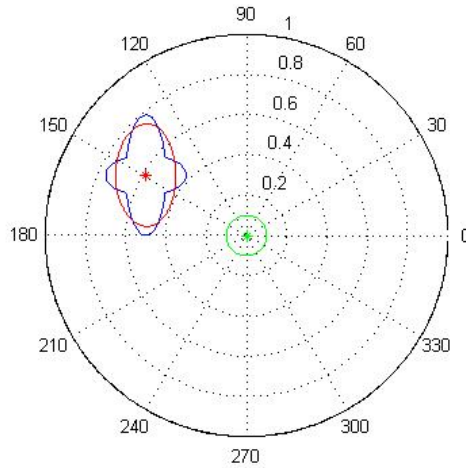


Figura 5.14: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho.

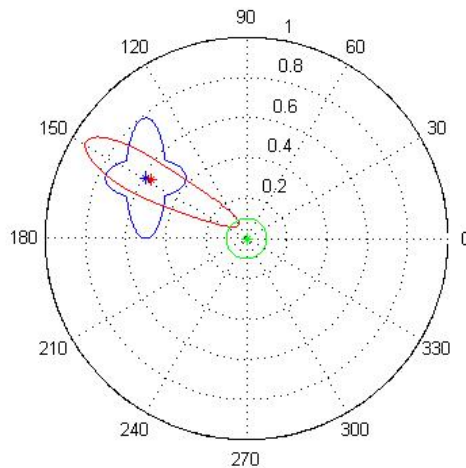


Figura 5.15: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 1%.

com estas duas fontes são muito semelhantes. E mais, os valores aproximados para $\partial_{\mathbf{n}}u$ também são muito próximos, como podemos ver na Figura 5.20. Isto é um indício de que o problema inverso de reconstrução de fontes aqui estudado **não** possui unicidade de soluções quando esta é considerada no conjunto das funções característica de um conjunto estrelado.

Na Figura 5.21 temos o vetor \mathbf{p} obtidos para as fontes χ_{ω} e χ_{ω^*} . Este vetor é usado como dado de entrada no método apresentado.

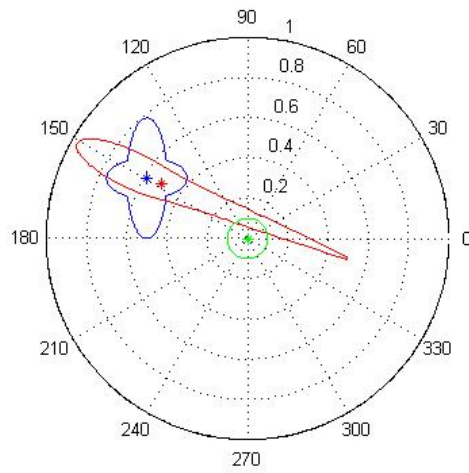


Figura 5.16: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 5%.

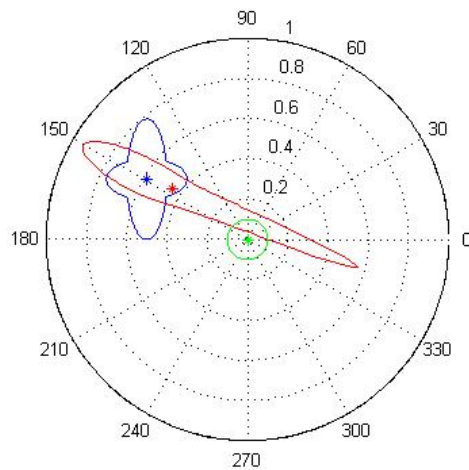


Figura 5.17: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho. Neste experimento foi acrescido um ruído Gaussiano de 8%.

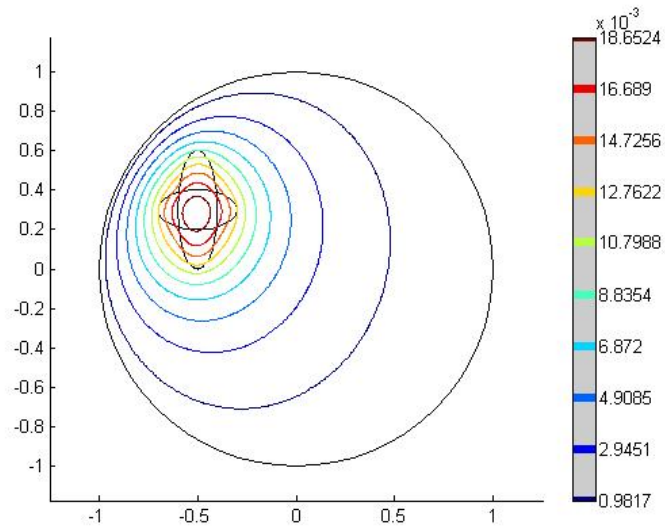


Figura 5.18: Curvas de nível da solução do problema direto com fonte χ_ω .

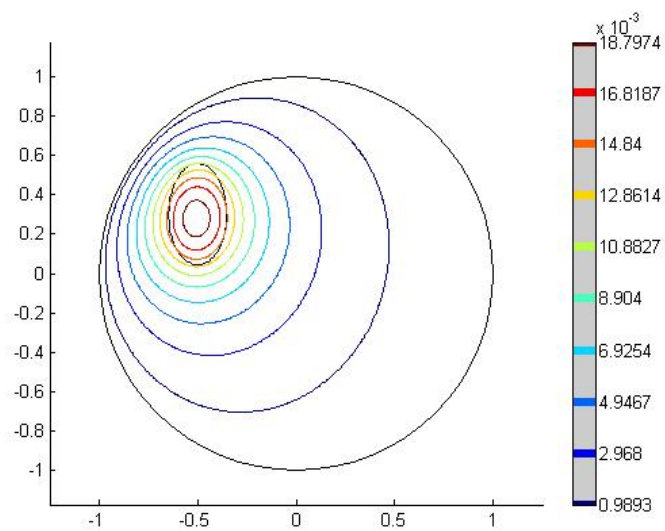


Figura 5.19: Curvas de nível da solução do problema direto com fonte χ_{ω^*} .

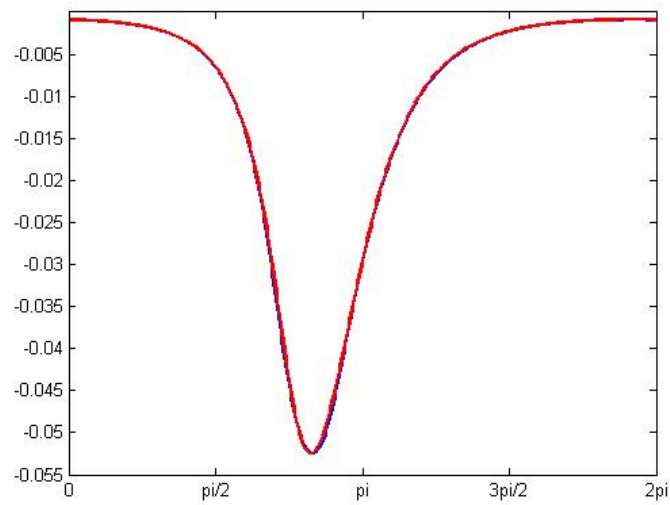


Figura 5.20: Gráficos de $\partial_{\mathbf{n}}u$ obtida para as duas fontes. Em azul, a função obtida para a fonte χ_{ω} e em vermelho, a função obtida para a fonte χ_{ω^*} .

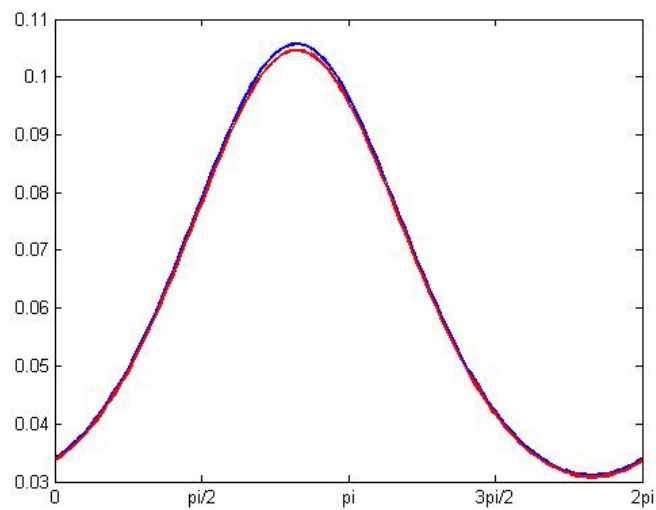


Figura 5.21: Gráficos de \mathbf{p} obtidas para as duas fontes. Em azul, a função obtida para a fonte χ_{ω} e em vermelho, a função obtida para a fonte χ_{ω^*} .

Capítulo 6

Perspectivas

Vimos que o problema inverso de identificação de fonte para a equação de difusão-advecção a partir de dados no bordo é mal-posto. Porém, a estratégia de buscar soluções para este problema usando a informação *a priori* de que ela se encontra na classe de funções características se mostra viável devido aos métodos e simulações para o problema unidimensional e bidimensional apresentados nesta tese.

No caso unidimensional apresentamos um método para recuperar o termo fonte quando este é uma função característica de um intervalo. Além disso, testamos a aplicação deste método na obtenção de aproximações por fontes característica para problemas com fontes de suporte compacto. Para este último caso, apresentamos duas simulações onde as aproximações obtidas foram boas.

No caso bidimensional apresentamos um método que se mostrou eficiente para recuperar o termo fonte quando sabemos que este se trata de uma função característica de conjuntos convexos. O método foi testado também para obter o termo fonte quando este é uma função característica de um conjunto estrelado. Neste caso o resultado não foi tão bom, porém ele aproximou bem a localização e a dimensão do conjunto procurado.

Na Subseção 5.3.2 apresentamos um experimento onde foi possível observar que duas fontes características de conjuntos estrelados podem gerar dados no bordo do domínio muito parecidos. Uma fonte era uma elipse (Figura 5.18) e outra a união de duas elipses com mesmo centro (Figura 5.19). Isto sugere que o problema não tem unicidade de solução quando considerado que temos informação *a priori* de que ela se encontra na classe de funções características de conjuntos estrelados.

Pretendemos ainda fazer alguns experimentos visando obter aproximações por fontes característica para problemas com fontes de suporte compacto no caso bidimensional.

Alguns testes não apresentados aqui foram feitos para obter um candidato a centro do conjunto o qual o termo fonte considerado é função característica. Pretendemos estender este resultado para localizar o centro dos conjuntos $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$

com fonte do problema dada por $\chi_{\omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_K}$ e tendo como informação *a priori* a área de cada conjunto.

Um trabalho mais matemático a ser feito é a aplicação do Teorema 5.1 para demonstrar boa colocação do problema inverso de determinação do termo fonte de uma equação de difusão-advecção a partir de dados no bordo buscando soluções em um espaço de Hilbert adequado, como indicado na Observação 5.1.

Referências Bibliográficas

- [1] KELLER, J. B. “Inverse Problems”, *Am. Math. Mon.*, v. 83, pp. 107–118, 1976.
- [2] HADAMARD, J. “Sur les problèmes aux Dérivées partielles et leur signification physique”, *Princeton University Bulletin*, v. 13, pp. 49–52, 1902.
- [3] ISAKOV, V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. New York, USA, Springer, 2006. 428 p.
- [4] KIRSH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Second ed. Karlsruhe, Germany, Springer, 2011. 310 p.
- [5] TARANTOLA, A. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Paris, France, SIAM, 2005. 342 p.
- [6] HETTLICH, F., RUNDELL, W. “Identification of a discontinuous source in the heat equation”, *Inverse Problems*, v. 17, pp. 1465–1482, 2001.
- [7] RING, W. “Identification of a core from boundary data”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 55, pp. 677–706, 1995.
- [8] ANDRLE, M., BELGACEM, F. B., BADIA, A. E. “Identification of moving pointwise sources in an advection-dispersion-reaction equation”, *Inverse Problems*, v. 27, n. 2, 2011.
- [9] RAP, A., ELLIOTT, L., INGHAM, D., et al. “An inverse source problem for the convection-diffusion equation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 16, n. 2, pp. 125–150, 2006.
- [10] LING, L., YAMAMOTO, M., HON, Y. C., et al. “Identification of source locations in two-dimensional heat equations”, *Inverse Problems*, v. 22, pp. 1289–1305, 2006.
- [11] NOVIKOV, P. “Sur le problem inverse du potentiel”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 18, n. 3, pp. 165–168, 1938.

- [12] BADIA, A. E., DUONG, T. H. “Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements”, *Inverse Problems*, v. 14, pp. 883–891, 1998.
- [13] ALVES, C. J. S., MARTINS, N. F., COLAÇO, M. J., et al. “Recovering the source term in a linear diffusion problem by the method of fundamental solutions”, *Inverse Problems in Science & Engineering*, v. 16, n. 8, pp. 1005–1021, 2008.
- [14] ROBERTY, N. C., ALVES, C. J. S. “On the identification of star shape sources from boundary using a reciprocity functional”, *Inverse Problems in Science & Engineering*, v. 17, n. 2, pp. 187–202, 2009.
- [15] DE SOUSA, D. M., ROBERTY, N. C. “Identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advectação”, *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 12, n. 2, pp. 101–110, 2011.
- [16] DE SOUSA, D. M., ROBERTY, N. C. “An inverse source problem for the stationary diffusion-advection-decay equation”, *Inverse Problems in Science & Engineering*, v. 20, n. 7, pp. 891–915, 2012.
- [17] DE SOUSA, D. M., ROBERTY, N. C. “Um algoritmo para recuperar uma fonte difusiva-advectiva a partir de informações no bordo de um domínio bidimensional”. In: *VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, São Luís, Brasil, 2012. ABCM.
- [18] KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, V. S. *Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Space*. New York, USA, Academic Press, 1962. 147 p.
- [19] LOGAN, J. D. *Applied Partial Differential Equations*. New York, USA, Springer, 2004. 215 p.
- [20] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. New York, USA, Academic Press, 1975. 286 p.
- [21] ENGL, H. W., HANKE, M., NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 2000. 321 p.
- [22] ALVES, C. J. S., MARTINS, N. F. M., ROBERTY, N. C. “Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements”, *Inverse Problems & Imaging*, v. 17, n. 2, pp. 275–294, 2009.
- [23] TIKHONOV, A. N. “Regularization of incorrectly posed problems”, *Soviet Mathematics Doklady*, v. 4, pp. 1624–1627, 1963.

- [24] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. Massachusetts, USA, Wellesley-Cambridge Press, 2009. 584 p.
- [25] VOGEL, C. R. *Computational Methods for Inverse Problems*. Philadelphia, USA, SIAM, 2002. 195 p.
- [26] LEVENBERG, K. “A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares”, *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, pp. 164–168, 1944.
- [27] MARQUARDT, D. “An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 11, pp. 431–441, 1963.
- [28] KRESS, R. *Numerical Analysis*. New York, USA, Springer, 1998. 356 p.
- [29] ANDRIEUX, S., ABDA, A. B. “The reciprocity gap: a general concept for flaws identification problems”, *Mechanical Research Communications*, v. 20, pp. 415–420, 1993.
- [30] CALDÉRON, A. “On an inverse boundary value problem”. In: *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics*, v. 1, pp. 65–73, Rio de Janeiro, Brasil, 1980. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [31] ERN, A., GUERMOND, J. L. *Theory and Practice of Finite Elements*. New York, USA, Springer, 2004. 524 p.
- [32] ROBERTY, N. C., RAINHA, M. L. S. “Star shape sources reconstruction in the modified Helmholtz equation Dirichlet problem”. In: *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*, João Pessoa, Brasil, 2010. ISIPSE.
- [33] DENNIS, J. E., SCHNABEL, N. B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs, USA, SIAM, 1996. 378 p.